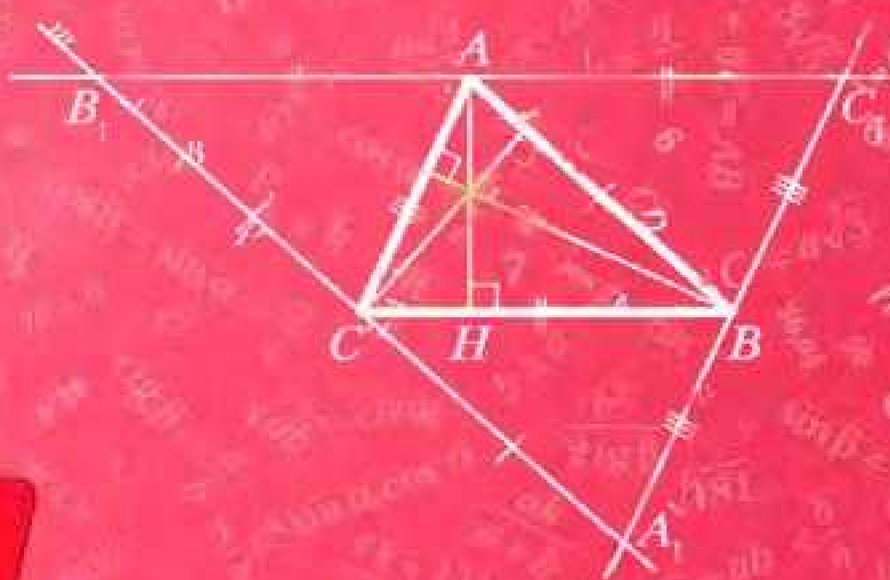
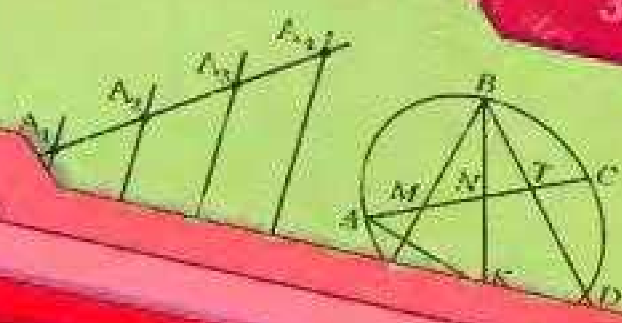
ФГОС

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

8 класс





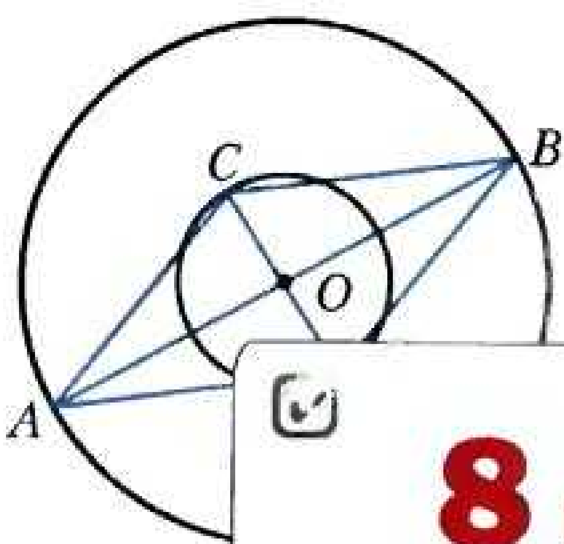
Геометрия

Вентана-Граф

Алгоритм успеха

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

Геометрия



8 класс

Учебник для учащихся
общеобразовательных учреждений

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2013

ББК 22.151я72
М52

Учебник включён в федеральный перечень

Мерзляк А.Г.

М52 Геометрия : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2013. — 208 с. : ил.

ISBN 978-5-360-04382-9

Учебник предназначен для изучения геометрии в 8 классе общеобразовательных учреждений. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебник входит в систему «Алгоритм успеха».

Содержание учебника соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (2010 г.).

ББК 22.151я72

ISBN 978-5-360-04382-9

От авторов

Дорогие восьмиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а следовательно, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хотелось бы верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Обращайте особое внимание на текст, выделенный **жирным шрифтом**.

Обычно изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым советуем лишь после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности, так и сложные и высокой сложности. Свои знания можно проверить, выполняя задания в тестовой форме, помещённые в конце каждой главы.

Каждый параграф завершается особой рубрикой, которую мы назвали «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Эти задачи полезны, они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, не простой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

◇ Сложные задачи

✲ Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

531 Задания, рекомендуемые для домашней работы

423 Задания для устной работы

Глава 1. Четырёхугольники

В этой главе рассматривается знакомая вам геометрическая фигура **четырёхугольник**. В курсе геометрии вы познакомитесь с отдельными видами четырёхугольника: параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом, трапецией, изу́чите свойства этих фигур и узнаете о признаках, с помощью которых среди четырёхугольников можно распознать такие фигуры.

Вы изу́чите свойства отрезка, соединяющего середины сторон треугольника, и убедитесь в том, что эти свойства могут служить ключом к решению целого ряда задач.

Как измерить дугу окружности? Около какого четырёхугольника можно описать окружность? В какой четырёхугольник можно вписать окружность? Изучив материал этой главы, вы получите ответы и на эти вопросы.

§ 1. Четырёхугольник и его элементы

На рисунке 1 отрезки AB и BC имеют только одну общую точку B, которая является концом каждого из них. Такие отрезки называют **соседними**. На рисунке 2 каждые два отрезка являются соседними.

Заметим, что отрезки AB и CD на рисунке 3, *а*, *б* не являются соседними.

Рис. 1

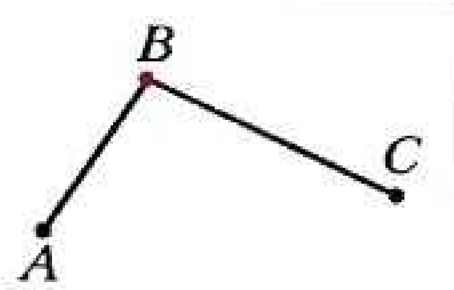


Рис. 2

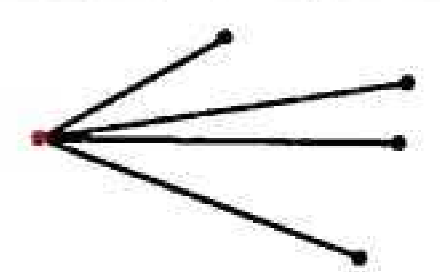
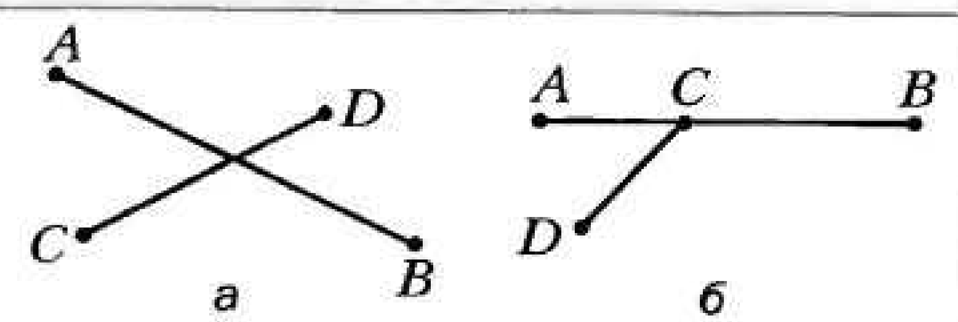


Рис. 3



Рассмотрим фигуру, состоящую из четырёх точек A, B, C, D и четырёх отрезков AB, BC, CD, DA, таких, что *никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек* (рис. 4).

Рис. 4

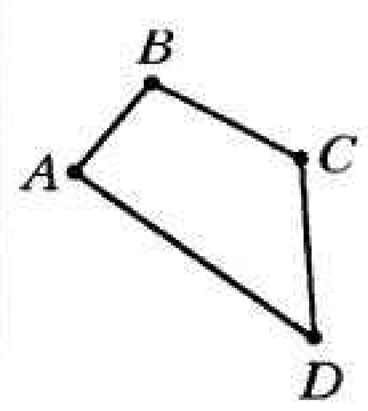
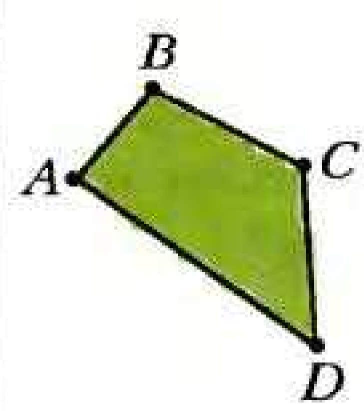


Рис. 5



Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 5 зелёным цветом.

Эту часть плоскости вместе с отрезками AB, BC, CD и DA называют **четырёхугольником**. Точки A, B, C, D называют **вершинами** четырёхугольника, а отрезки AB, BC, CD, DA – **сторонами** четырёхугольника.

На рисунке 6, *а*, *б* изображены фигуры, состоящие из четырёх отрезков AB, BC, CD, DA и части плоскости, которую они ограничивают. Однако эти фигуры не являются четырёхугольниками. Объясните почему.

Стороны четырёхугольника, являющиеся соседними отрезками, называют **соседними сторонами** четырёхугольника. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называют **соседними вершинами** четырёхугольника. Стороны, не являющиеся соседними, называют **противолежащими сторонами** четырёхугольника. Несоседние вершины называют **противолежащими вершинами** четырёхугольника.

На рисунке 7 изображён четырёхугольник, в котором, например, стороны MQ и MN являются соседними, а стороны NP и MQ – противолежащими, вершины Q и P – соседние, а вершины M и P – противолежащие.

Рис. 6

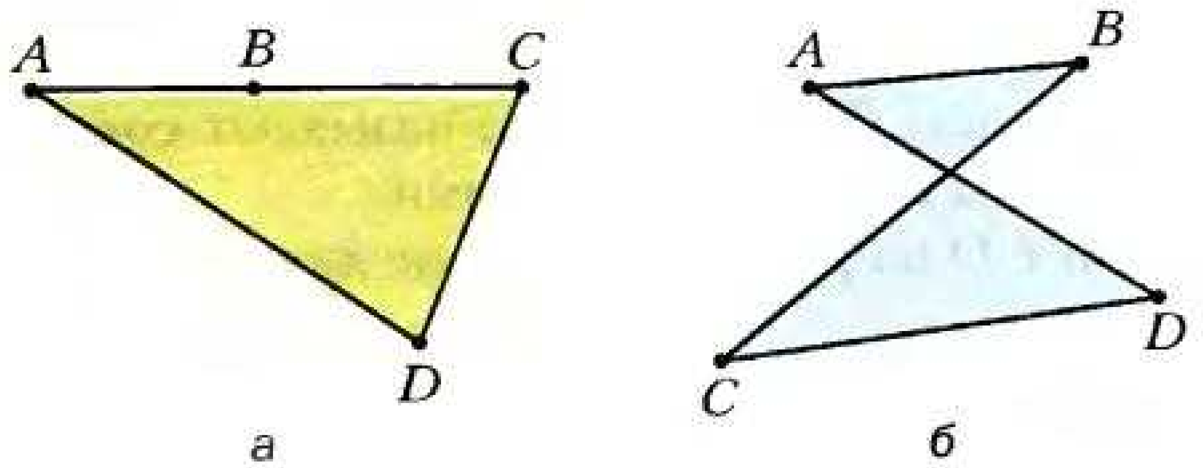
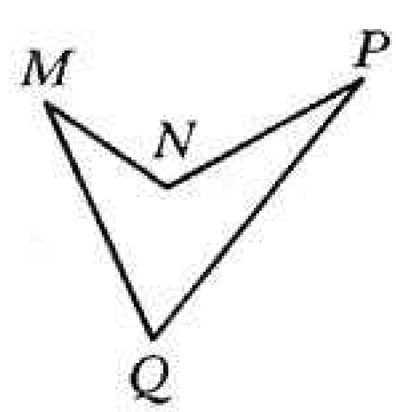


Рис. 7



Четырёхугольник называют и обозначают по его вершинам. Например, на рисунке 4 изображён четырёхугольник $ABCD$, а на рисунке 7 – четырёхугольник $MNPQ$. При обозначении четырёхугольника буквы, стоящие рядом, соответствуют соседним вершинам четырёхугольника. Например, четырёхугольник, изображённый на рисунке 7, можно обозначить так: $PQMN$, либо $MQPN$, либо $NPQM$ и т. д.

Сумму длин всех сторон четырёхугольника называют **периметром** четырёхугольника.

Отрезок, соединяющий противолежащие вершины четырёхугольника, называют **диагональю** четырёхугольника. На рисунке 8, *а*, *б* отрезки AC и BD – диагонали четырёхугольника $ABCD$.

Углы ABC, BCD, CDA, DAB (рис. 9) называют **углами четырёхугольника** $ABCD$. В этом четырёхугольнике все они меньше развёрнутого угла. Такой четырёхугольник называют **выпуклым**. Однако существуют че-

Рис. 8

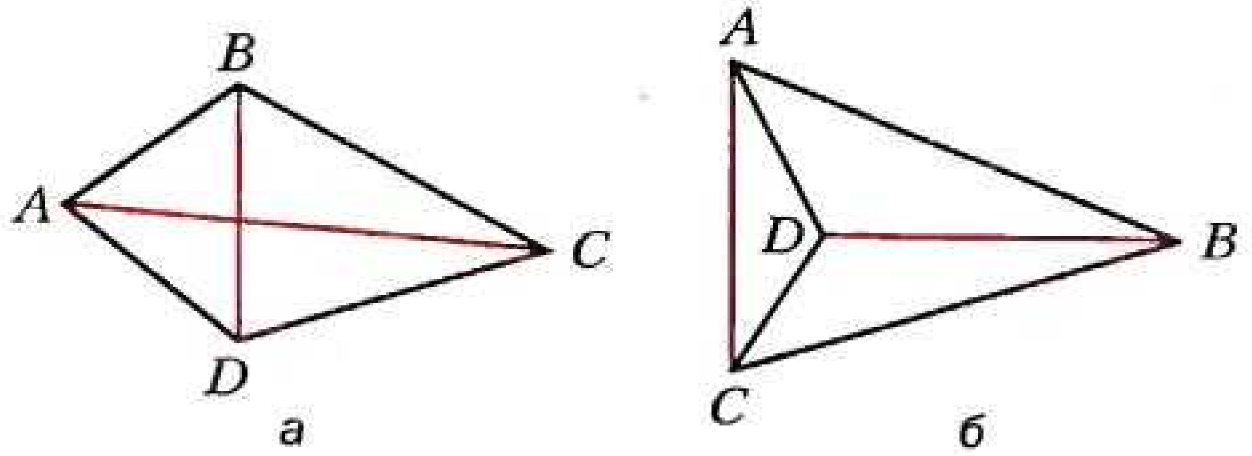
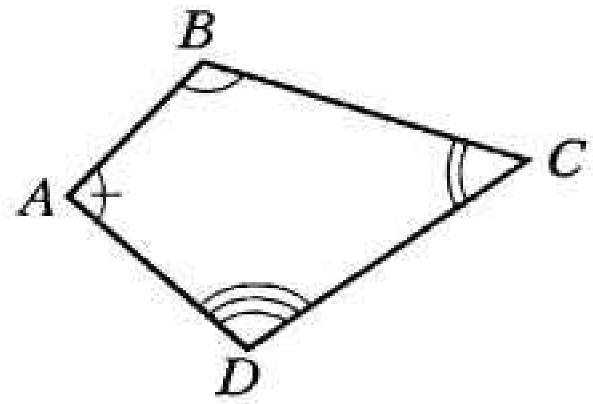
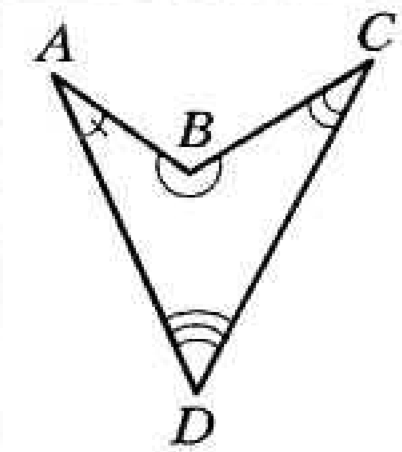


Рис. 9



тырёхугольники, в которых не все углы меньше развёрнутого. Например, на рисунке 10 угол B четырёхугольника $ABCD$ больше развёрнутого. Такой четырёхугольник не является **выпуклым**. Подробнее с выпуклыми многоугольниками вы ознакомитесь в § 19.

Рис. 10



Углы ABC и ADC называют **противолежащими углами** четырёхугольника $ABCD$ (*см.* рис. 9, 10). Также противолежащими являются углы BAD и BCD.

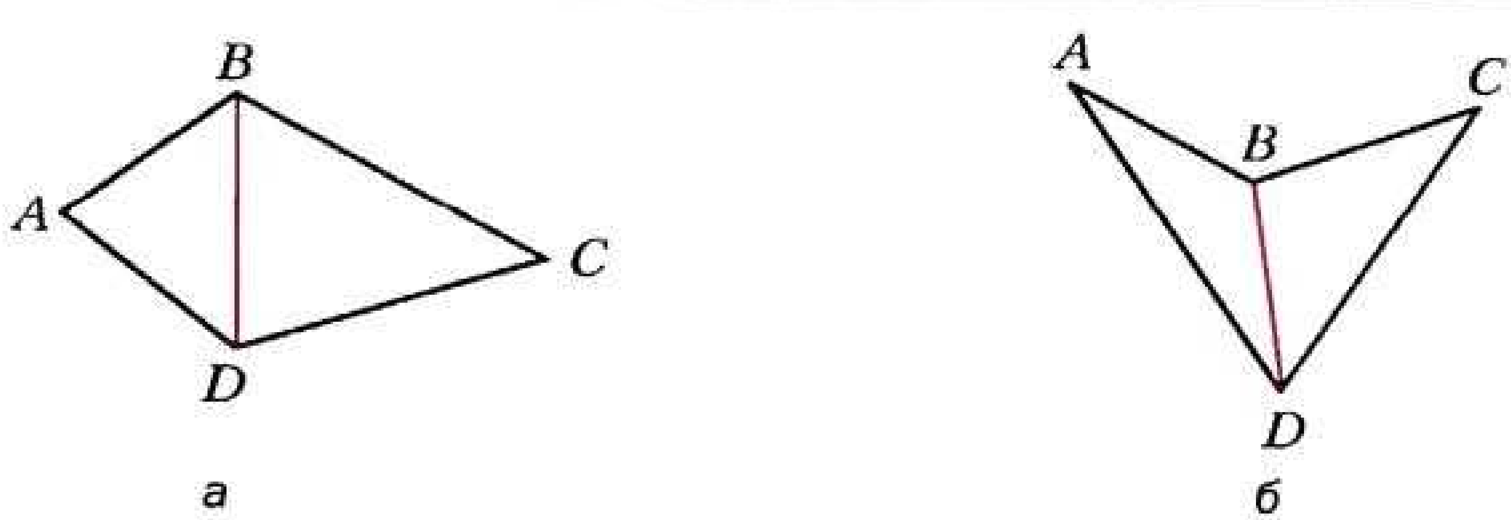
Теорема 1.1

Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

Доказательство

В четырёхугольнике проведём диагональ, которая разбивает его на два треугольника. Например, на рисунке 11 это диагональ BD. Тогда сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна сумме углов треугольников ABD и CBD. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то сумма углов четырёхугольника равна 360°. ◄

Рис. 11



Следствие

В четырёхугольнике только один из углов может быть больше развёрнутого.

Докажите это свойство самостоятельно.

__Задача 1.__ Докажите, что длина любой стороны четырёхугольника меньше суммы длин трёх остальных его сторон.

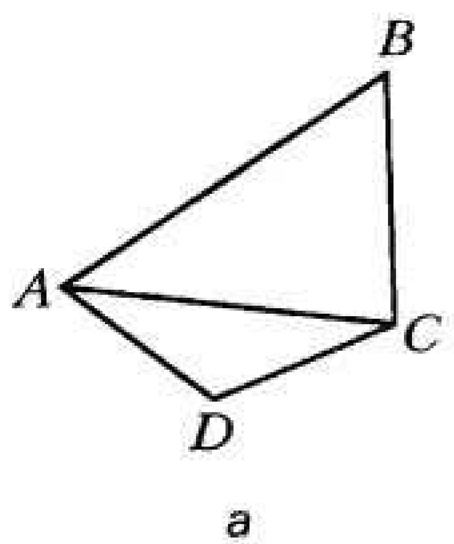
Решение. Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$ (рис. 12, *а*). Покажем, например, что $AB < AD + DC + CB$.

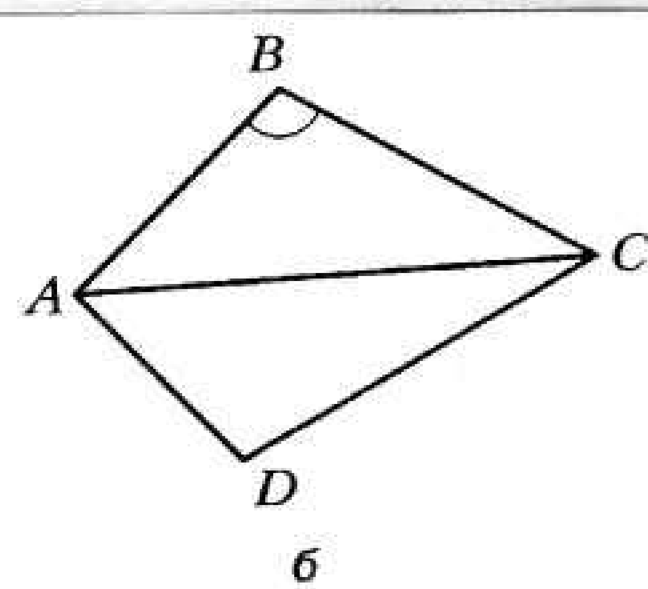
Проведём диагональ AC. Применяя неравенство треугольника для сторон AB и AC соответственно треугольников ABC и ADC, получаем неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Отсюда: $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Следовательно, $AB < AD + DC + CB$. ◄

Рис. 12





__Задача 2.__ Постройте четырёхугольник по двум соседним сторонам и четырём углам, каждый из которых меньше развёрнутого.

Решение. На рисунке 12, *б* изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором известны длины сторон AB и BC, а также все его углы.

В треугольнике ABC известны две стороны AB и BC и угол B между ними. Следовательно, этот треугольник можно построить. Это построение позволяет получить отрезок AC и углы BAC и BCA. Отсюда, зная углы четырёхугольника при вершинах A и C, можно получить углы DAC и DCA. Таким образом, в треугольнике ACD известны сторона и два прилежащих к ней угла. Его тоже можно построить.

Проведённый анализ показывает, как строить искомый четырёхугольник.

Строим треугольник по двум данным сторонам четырёхугольника и углу между ними. На рисунке 12, *б* это треугольник ABC. Далее строим треугольник ACD по полученной стороне AC и найденным углам DAC и DCA. Четырёхугольник $ABCD$ – искомый. ◂

1. Объясните, какие отрезки называют соседними.

2. Объясните, какую фигуру называют четырёхугольником.

3. Какие стороны четырёхугольника называют соседними? Противолежащими?

4. Какие вершины четырёхугольника называют соседними? Противолежащими?

5. Как обозначают четырёхугольник?

6. Что называют периметром четырёхугольника?

7. Что называют диагональю четырёхугольника?

8. Какой четырёхугольник называют выпуклым?

9. Сформулируйте теорему о сумме углов четырёхугольника.

Практические задания

1. Начертите четырёхугольник, в котором:
1) три угла тупые;
2) два соседних угла – прямые, а два других не являются прямыми;
3) одна диагональ точкой пересечения диагоналей делится пополам, а другая не делится пополам;
4) диагонали перпендикулярны.

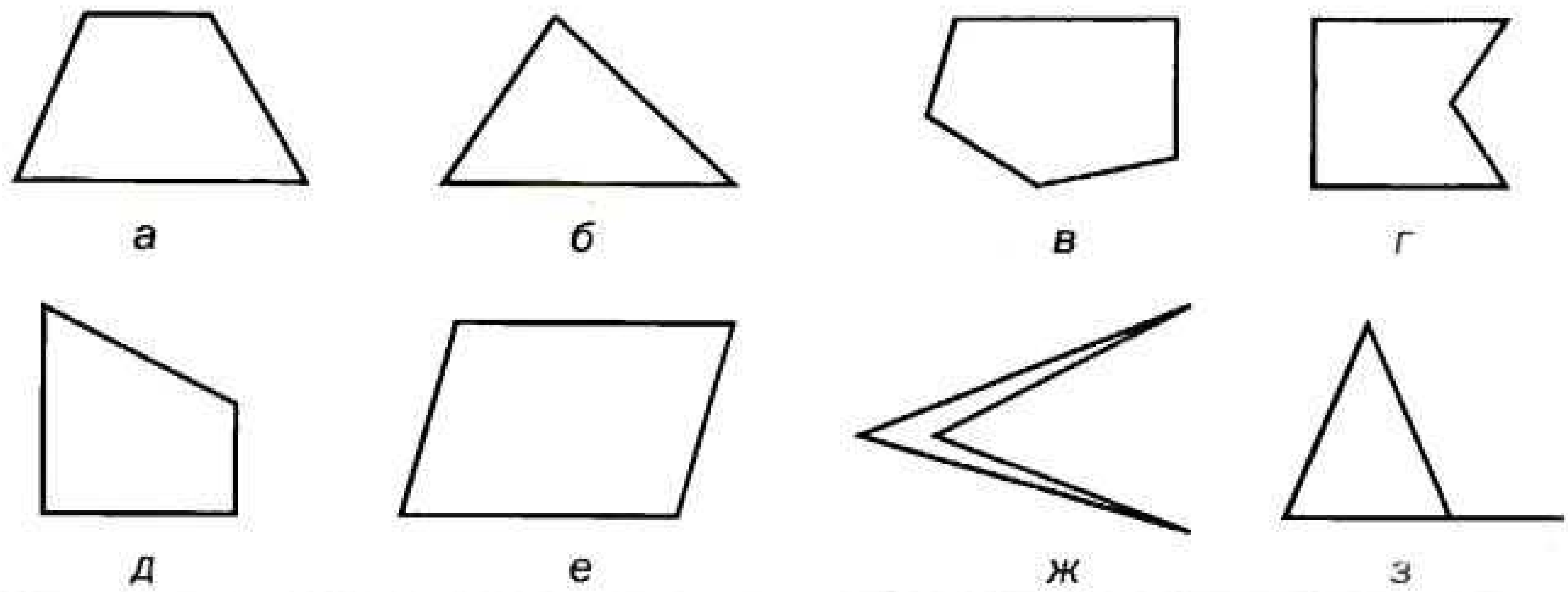
2. Начертите произвольный четырёхугольник, обозначьте его вершины буквами M, K, E, F. Укажите пары его соседних сторон, противолежащих сторон, противолежащих вершин. Запишите три каких-нибудь обозначения этого четырёхугольника.

3. Начертите четырёхугольник, в котором:
1) три угла острые;
2) два противолежащих угла – прямые, а два других не являются прямыми;
3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Упражнения

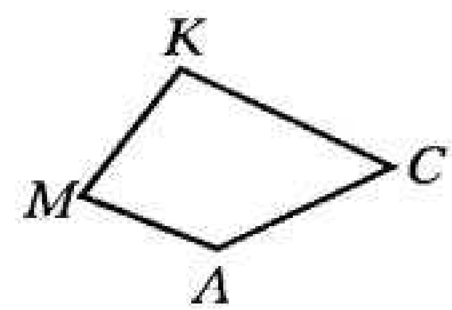
4. Среди фигур, изображённых на рисунке 13, укажите четырёхугольники.

Рис. 13



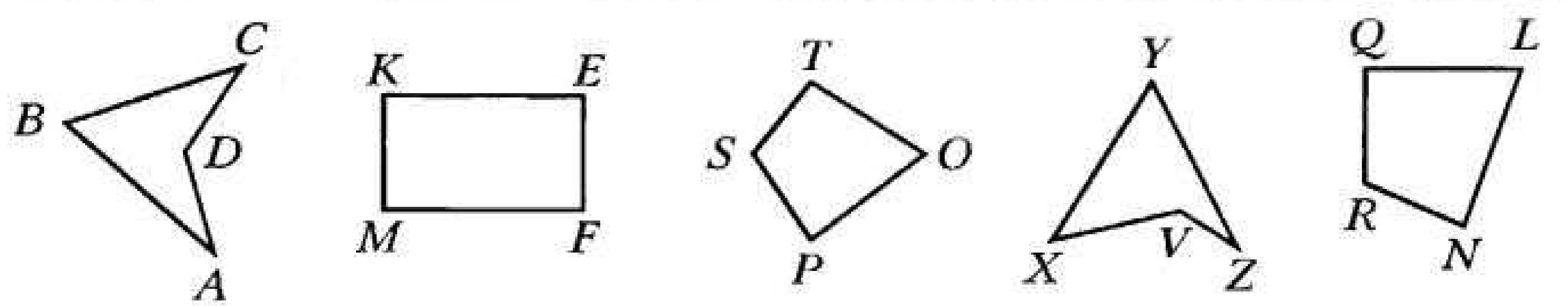
5. Назовите четыре каких-нибудь обозначения четырёхугольника, изображённого на рисунке 14. Укажите:
   1) вершины четырёхугольника;
   2) его стороны;
   3) пары соседних вершин;
   4) пары противолежащих вершин;
   5) пары соседних сторон;
   6) пары противолежащих сторон.

Рис. 14



6. Среди четырёхугольников, изображённых на рисунке 15, укажите выпуклые.

Рис. 15



7. Чему равен четвёртый угол четырёхугольника, если три его угла равны 78°, 89° и 93°?
8. Найдите углы четырёхугольника, если они равны между собой.
9. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle B = 150^\circ$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Найдите неизвестные углы четырёхугольника.
10. Один из углов четырёхугольника в 2 раза меньше второго угла, на 20° меньше третьего и на 40° больше четвёртого. Найдите углы четырёхугольника.

11. Найдите углы четырёхугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 10 и 21. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

12. Найдите углы четырёхугольника, если три его угла пропорциональны числам 4, 5 и 7, а четвёртый угол равен их полусумме. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

13. Может ли у четырёхугольника быть:
1) три прямых угла и один острый;
2) три прямых угла и один тупой;
3) четыре прямых угла;
4) четыре острых угла;
5) два прямых и два тупых угла;
6) два прямых угла, один острый и один тупой?

14. Периметр четырёхугольника равен 63 см. Найдите его стороны, если вторая сторона составляет $\frac{2}{3}$ первой, третья — 50 % второй, а четвёртая — 150 % первой.

15. Найдите стороны четырёхугольника, если одна из них на 2 см больше второй, на 6 см меньше третьей, в 3 раза меньше четвёртой, а периметр равен 64 см.

16. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, а диагональ BD образует с этими сторонами равные углы. Докажите, что стороны CD и AD также равны.

17. Диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, одна из его сторон равна 6 см. Чему равна противолежащая ей сторона четырёхугольника?

18. В четырёхугольнике $MNKP$ известно, что $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100°$. Найдите угол K.

19. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC образует со сторонами AB и AD равные углы и со сторонами CB и CD также равные углы, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.

20. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Биссектрисы AK и BM треугольника пересекаются в точке O. Найдите углы четырёхугольника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Высоты AE и BF треугольника пересекаются в точке H. Найдите углы четырёхугольника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22. Найдите диагональ четырёхугольника, если его периметр равен 80 см, а периметры треугольников, на которые эта диагональ разбивает данный четырёхугольник, равны 36 см и 64 см.

23. Могут ли стороны четырёхугольника быть равными:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

24. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Докажите, что биссектрисы двух других углов четырёхугольника либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

25. Докажите, что если биссектрисы двух противолежащих углов выпуклого четырёхугольника параллельны или лежат на одной прямой, то два других угла четырёхугольника равны.

26. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одному из углов.

27. Постройте четырёхугольник по трём сторонам и двум диагоналям.

28. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одной из диагоналей.

29. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по углам A и B, сторонам AB и BC и сумме сторон AD и CD.

Готовимся к изучению новой темы

30. Прямая c пересекает каждую из прямых a и b (рис. 16). Укажите пары накрест лежащих и пары односторонних углов, образовавшихся при этом. Каково взаимное расположение прямых a и b, если: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20^\circ$, $\angle 3 = 170^\circ$?

31. В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 17) $\angle C = 110^\circ$, $\angle D = 70^\circ$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

32. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle C = 100^\circ$. Являются ли параллельными прямые: 1) BC и AD; 2) AB и CD?

33. На рисунке 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите, что $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

Рис. 16

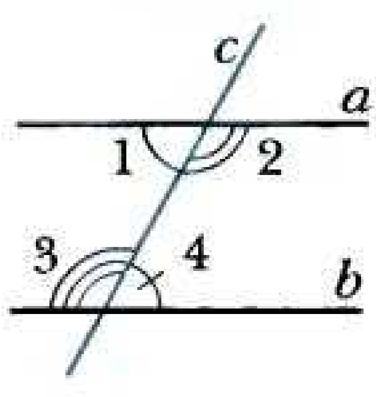


Рис. 17

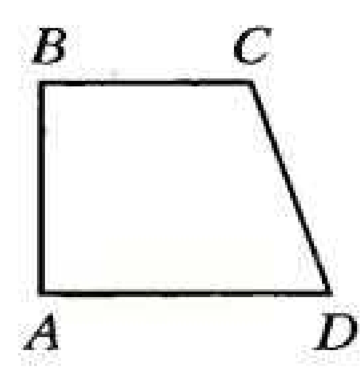
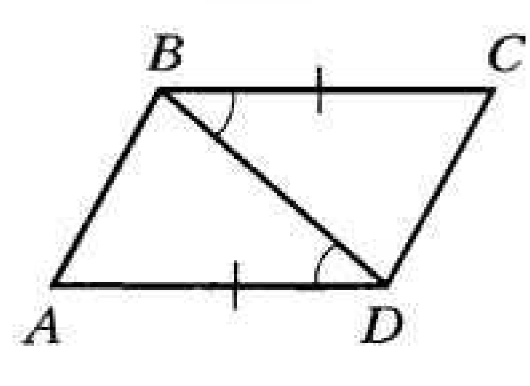


Рис. 18



34. Отрезок BK – биссектриса треугольника ABC. Прямая DK параллельна стороне AB и пересекает сторону BC в точке D, $\angle BDK = 116^\circ$. Найдите $\angle BKD$.

Повторите содержание пунктов 12, 13, 14 на с. 199–200.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

35. Белая плоскость произвольно забрызгана чёрной краской. Докажите, что на плоскости найдётся отрезок длиной 1 м, концы которого закрашены одним цветом.

§ 2. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Определение

Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

На рисунке 19 изображён параллелограмм $ABCD$. По определению параллелограмма: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

Теорема 2.1

Противолежащие стороны параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 19 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $AB = CD$ и $BC = AD$.

Проведём диагональ AC. Докажем, что треугольники ABC и CDA равны (рис. 20).

В этих треугольниках сторона AC — общая, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC (*см.* рис. 20). Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$ и $BC = AD$. ◄

Рис. 19

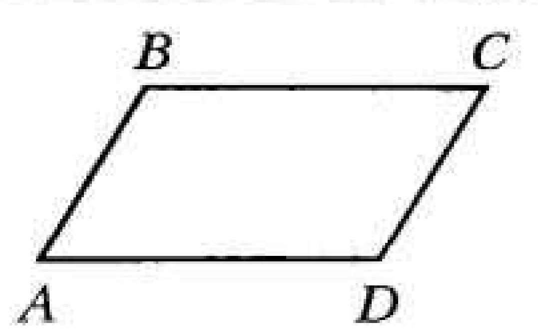
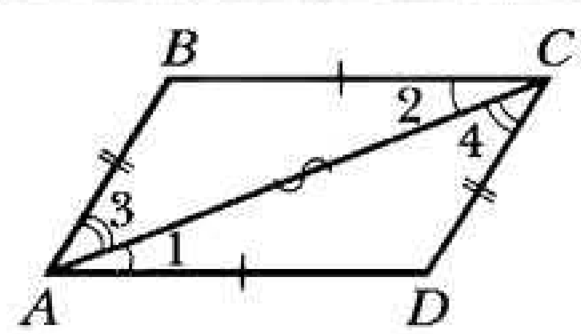


Рис. 20



Теорема 2.2

Противолежащие углы параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 19 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.

При доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что $\Delta ABC = \Delta CDA$ (*см.* рис. 20). Отсюда $\angle B = \angle D$. Из равенства углов 1 и 2 и равенства углов 3 и 4 следует, что $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$. ◄

Следствие

Параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.

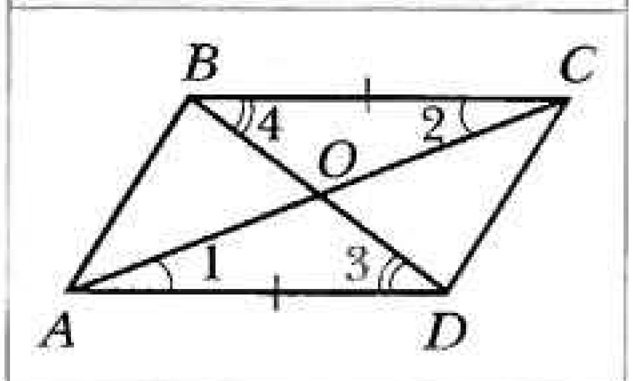
Докажите это свойство самостоятельно.

Теорема 2.3

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство

Рис. 21



На рисунке 21 изображён параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

Рассмотрим треугольники AOD и COB. Они равны.

Действительно, $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно. По теореме 2.1 имеем: $AD = BC$. Следовательно, треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AO = OC$, $BO = OD$. ◄

Определение

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

На рисунке 22 каждый из отрезков AF, QE, BM, CK, PN является высотой параллелограмма $ABCD$.

Из курса геометрии 7 класса вы знаете, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от второй прямой. Поэтому $AF = QE$ и $BM = PN = CK$.

Говорят, что **высоты** BM, CK, PN **проведены к сторонам** BC и AD, а высоты AF, QE – к сторонам AB и CD.

Задача 1. Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Через каждую вершину данного треугольника ABC проведём прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 23).

Рис. 22

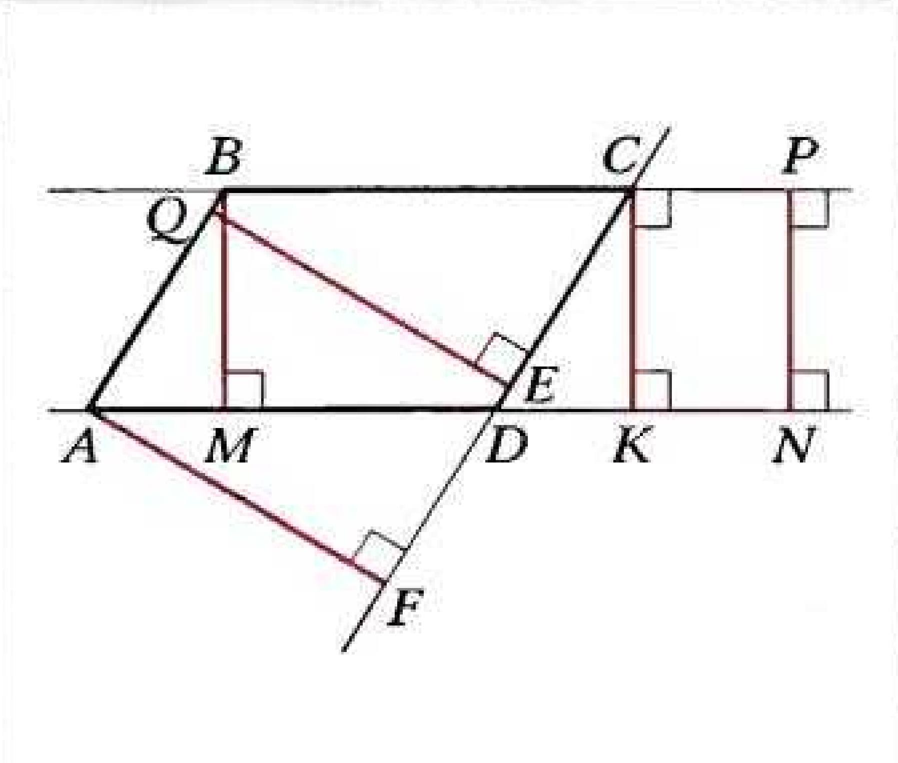
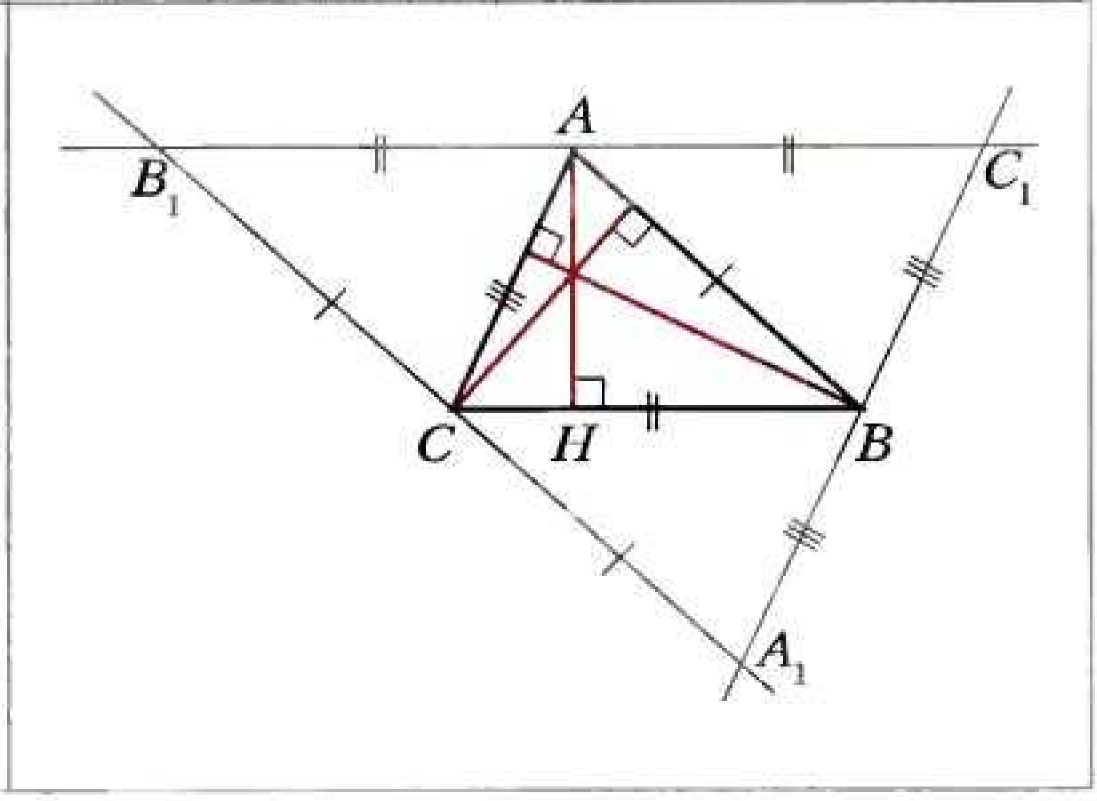


Рис. 23



Из построения следует, что четырёхугольники AC_1BC и $ABCB_1$ – параллелограммы. Отсюда $AC_1 = BC = AB_1$. Следовательно, точка A является серединой отрезка B_1C_1.

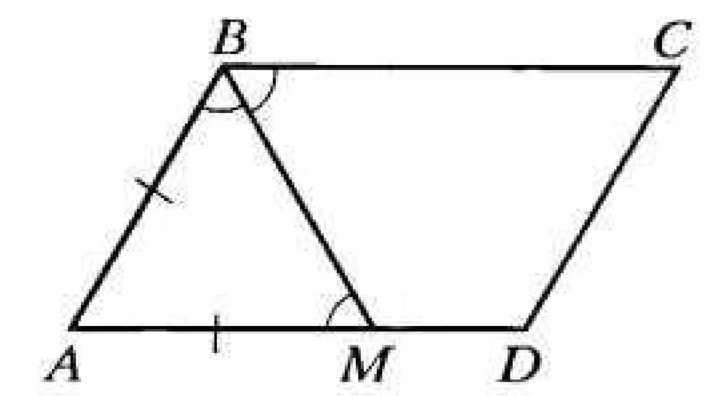
Так как прямые B_1C_1 и BC параллельны, то высота AH треугольника ABC перпендикулярна отрезку B_1C_1. Следовательно, прямая AH – серединный перпендикуляр стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично можно доказать, что прямые, содержащие две другие высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами сторон C_1A_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Так как серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, то решение задачи завершено. ◄

Задача 2. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

Решение. Пусть биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ (рис. 24) пересекает сторону AD в точке M. По условию $AM : MD = 2 : 1$.

Рис. 24



Углы ABM и CBM равны по условию.

Углы CBM и AMB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BM.

Тогда $\angle ABM = \angle AMB$. Следовательно, треугольник BAM – равнобедренный, отсюда $AB = AM$.

Пусть $MD = x$ см, тогда $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Так как противолежащие стороны параллелограмма равны, то его периметр равен $2(AB + AD)$. Учитывая, что периметр параллелограмма равен 60 см, получаем:

$2(2x + 3x) = 60;$

$x = 6.$

Следовательно, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

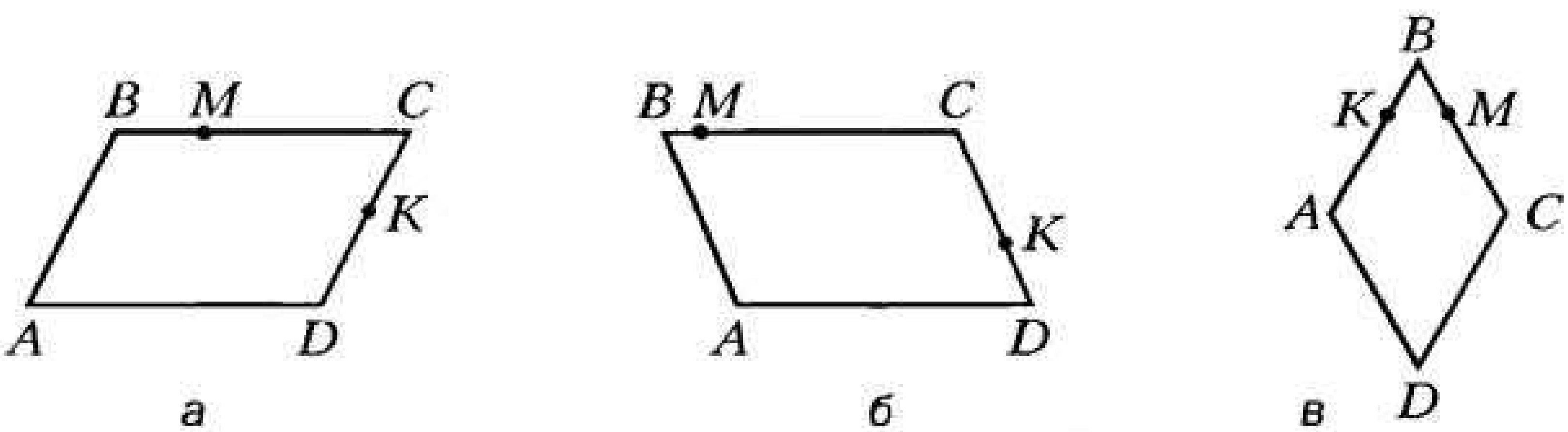
Ответ: 12 см, 18 см. ◂

1. Какой четырёхугольник называют параллелограммом?
2. Каким свойством обладают противолежащие стороны параллелограмма?
3. Каким свойством обладают противолежащие углы параллелограмма?
4. Каким свойством обладают диагонали параллелограмма?
5. Что называют высотой параллелограмма?

Практические задания

36. На рисунке 25 изображён параллелограмм $ABCD$. Сделайте такой рисунок в тетради. Проведите из точек B и M высоты параллелограмма к стороне AD, а из точки K – высоту к стороне AB.

Рис. 25

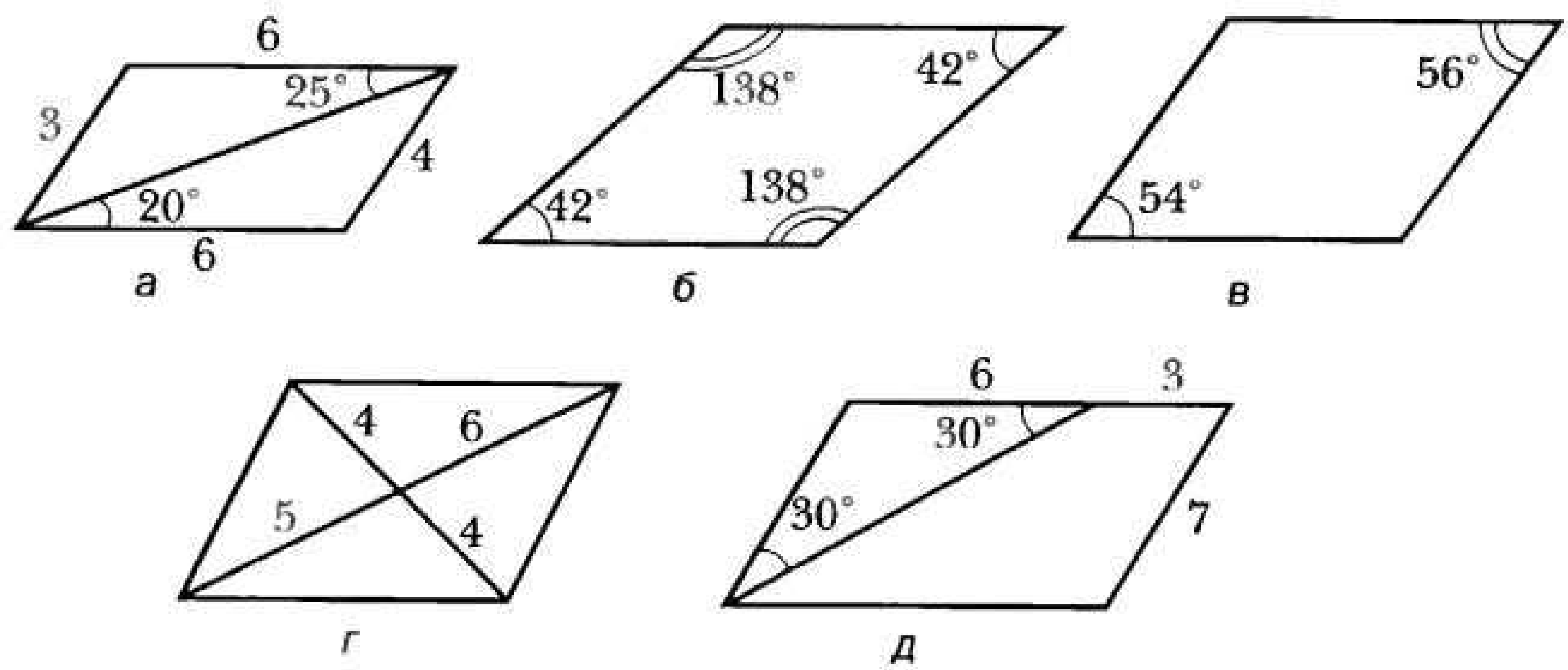


Упражнения

37. Две параллельные прямые пересекают три другие параллельные прямые. Сколько при этом образовалось параллелограммов?

38. На рисунке 26 изображены параллелограммы. Определите, не выполняя измерений, на каких рисунках величины углов или длины отрезков обозначены неправильно (длины отрезков даны в сантиметрах).

Рис. 26



39. Хватит ли 40 см проволоки, чтобы изготовить из неё параллелограмм со сторонами: 1) 14 см и 8 см; 2) 16 см и 4 см; 3) 12 см и 6 см?

40. Периметр параллелограмма равен 112 см. Найдите его стороны, если: 1) одна из них на 12 см меньше другой; 2) две его стороны относятся как 5 : 9.

41. Найдите стороны параллелограмма, если одна из них в 5 раз больше другой, а периметр параллелограмма равен 96 см.

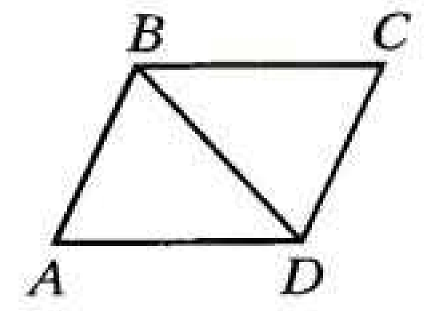
42. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O – точка пересечения его диагоналей. Найдите периметр треугольника COD.

43. Докажите, что сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180°.

44. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 35°$. Через произвольную точку, принадлежащую стороне BC, проведены две прямые, параллельные сторонам AB и AC треугольника. Определите вид образовавшегося четырёхугольника и найдите все его углы.

45. Найдите углы параллелограмма $ABCD$ (рис. 27), если $\angle ABD = 68^\circ$, $\angle ADB = 47^\circ$.

Рис. 27



46. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AB угол, равный 32°, $\angle BCD = 56^\circ$. Найдите $\angle CAD$ и $\angle D$.

47. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Определите вид треугольника ABM.

48. Найдите углы параллелограмма, если:
1) сумма двух его углов равна 100°;
2) разность двух его углов равна 20°;
3) два его угла относятся как $3 : 7$.

49. Найдите углы параллелограмма, если один из них:
1) в 2 раза больше другого;
2) на 24° меньше другого.

50. Стороны параллелограмма равны 6 см и 10 см. Может ли одна из его диагоналей быть равной 16 см?

51. Высота BK параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки AK и KD такие, что $AK = 4$ см, $KD = 6$ см. Найдите углы и периметр параллелограмма, если $\angle ABK = 30^\circ$.

52. Один из углов параллелограмма равен 45°. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 3 см и делит сторону параллелограмма пополам. Найдите эту сторону параллелограмма и углы, которые образует диагональ, соединяющая вершины тупых углов, со сторонами параллелограмма.

53. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $\angle C = 30^\circ$, высота BH, проведённая к стороне CD, равна 7 см, а периметр параллелограмма равен 46 см. Найдите стороны параллелограмма.

54. Даны параллелограмм $ABCD$ и треугольник MKN. Могут ли одновременно выполняться равенства $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle N$?

55. Докажите, что вершины B и D параллелограмма $ABCD$ равноудалены от прямой AC.

56. Докажите, что любой отрезок, который проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма и концы которого принадлежат противолежащим сторонам параллелограмма, делится этой точкой пополам.

57. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 24 см, $\angle ABC = 160^\circ$, диагональ AC образует со стороной AD угол 10°. Найдите стороны параллелограмма.

58. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует со стороной AB угол 65°, $\angle C = 50^\circ$, $AB = 8$ см. Найдите периметр параллелограмма.

59. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $BD \perp AB$ и $BD = AB$.

60. Диагональ параллелограмма образует с его сторонами углы 30° и 90°. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 36 см.

61. Вне параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная его диагонали BD, которая пересекает прямые AB, BC, CD и AD в точках E, M, F и K соответственно. Докажите, что $MK = EF$.

62. Параллельно диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезки AB и BC в точках M и N, а прямые AD и CD в точках P и K соответственно. Докажите, что $PM = NK$.

63. Один из углов, образованных при пересечении биссектрисы угла параллелограмма с его стороной, равен 24°. Найдите углы параллелограмма.

64. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M. Найдите периметр данного параллелограмма, если $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

65. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его сторону в отношении $3 : 5$, считая от вершины тупого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 66 см.

66. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону CD в точке K так, что отрезок CK в 5 раз больше отрезка KD. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 88 см.

67. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках E и F соответственно. Найдите отрезок EF.

68. Угол между высотой BH параллелограмма $ABCD$ и биссектрисой BM угла ABC равен 24°. Найдите углы параллелограмма.

69. Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен острому углу параллелограмма.

70. Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

71. Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен 30°. Найдите периметр параллелограмма, если его высоты равны 4 см и 6 см.

72. Высоты параллелограмма, проведённые из вершины острого угла, образуют угол 150°, стороны параллелограмма равны 10 см и 18 см. Найдите высоты параллелограмма.

73. Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные его боковым сторонам. Докажите, что периметр образовавшегося четырёхугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

74. Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, параллельная противолежащей стороне. Сумма периметров всех образовавшихся параллелограммов равна 100 см. Найдите периметр треугольника ABC.

75. Постройте параллелограмм:

1) по двум сторонам и углу между ними;

2) по двум диагоналям и стороне;

3) по стороне, диагонали и углу между ними.

76. Постройте параллелограмм:

1) по двум сторонам и диагонали;

2) по двум диагоналям и углу между ними.

77. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм, вершинами которого являются данные точки. Сколько решений имеет задача?

78. Точка пересечения биссектрис двух соседних углов параллелограмма принадлежит его стороне. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

79. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ существует такая точка M, что $BM = MD = CD$. Найдите углы параллелограмма, если $AD = BD$.

80. Постройте параллелограмм:

1) по стороне, проведённой к ней высоте и диагонали;

2) по двум диагоналям и высоте;

3) по острому углу и двум высотам, проведённым к двум соседним сторонам.

81. Постройте параллелограмм:

1) по двум сторонам и высоте;

2) по диагонали и двум высотам, проведённым к двум соседним сторонам.

82. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ опущен перпендикуляр BE на диагональ AC. Через точку A проведена прямая m, перпендикулярная прямой AD, а через точку C – прямая n, перпендикулярная прямой CD. Докажите, что точка пересечения прямых m и n принадлежит прямой BE.

83. Постройте параллелограмм по стороне, сумме диагоналей и углу между диагоналями.

84. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABM и BCK. Докажите, что треугольник MKD – равносторонний.

85. Через точку, принадлежащую углу, проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключённый внутри угла, данной точкой делился пополам.

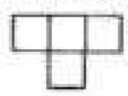
Упражнения для повторения

86. Отрезок AB равен 24 см. Точка C принадлежит прямой AB, причём $BC = 5AC$. На отрезке AB отмечена точка D так, что $AB = 4BD$. Найдите отрезок CD.

87. Сколько существует неравных между собой:
1) прямоугольных треугольников со стороной 5 см и углом 45°;
2) равнобедренных треугольников со стороной 6 см и углом 30°;
3) прямоугольных треугольников со стороной 7 см и углом 60°?

88. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ являются диаметрами окружности. Докажите, что $AB \parallel CD$.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

89. Можно ли квадрат размером 10×10 клеток разрезать на 25 фигур, которые состоят из четырёх клеток и имеют такой вид: ?

§ 3. Признаки параллелограмма

Определение параллелограмма позволяет среди четырёхугольников распознавать параллелограммы. Этой же цели служат следующие три теоремы, которые называют признаками параллелограмма.

Теорема 3.1
(обратная теореме 2.1)

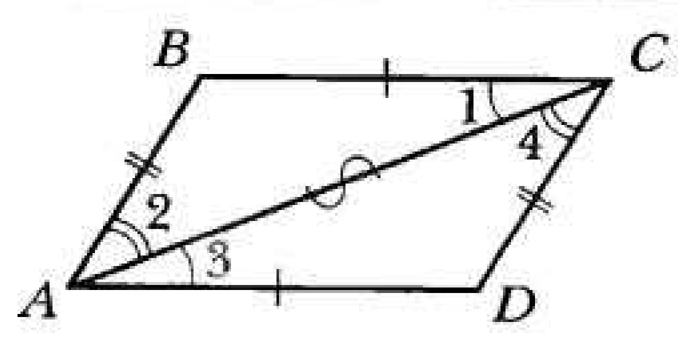
Если в четырёхугольнике каждые две противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство

На рисунке 28 изображён четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Проведём диагональ AC. Треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку

Рис. 28



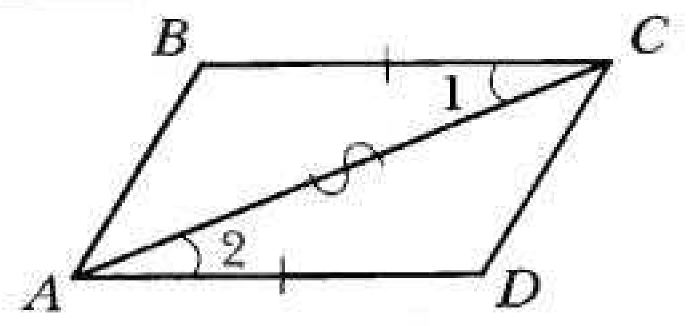
равенства треугольников. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Углы 1 и 3 являются накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, $BC \parallel AD$. Аналогично из равенства $\angle 2 = \angle 4$ следует, что $AB \parallel CD$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ каждые две противолежащие стороны параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм. ◄

Теорема 3.2

Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Рис. 29



Доказательство

На рисунке 29 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

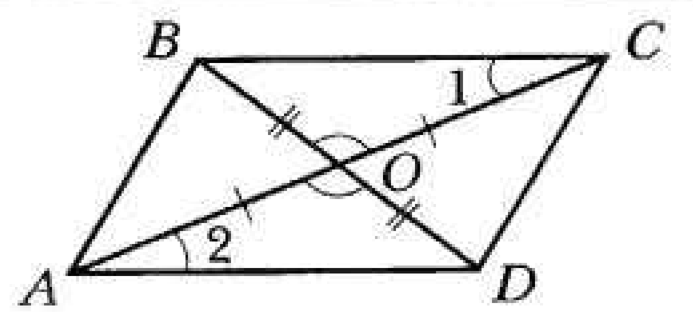
Проведём диагональ AC. В треугольниках ABC и CDA имеем: $BC = AD$ по условию, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, а сторона AC — общая. Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$. Значит, в четырёхугольнике $ABCD$ каждые две противолежащие стороны равны. Поэтому по теореме 3.1 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. ◄

Теорема 3.3

(обратная теореме 2.3)

Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Рис. 30



Доказательство

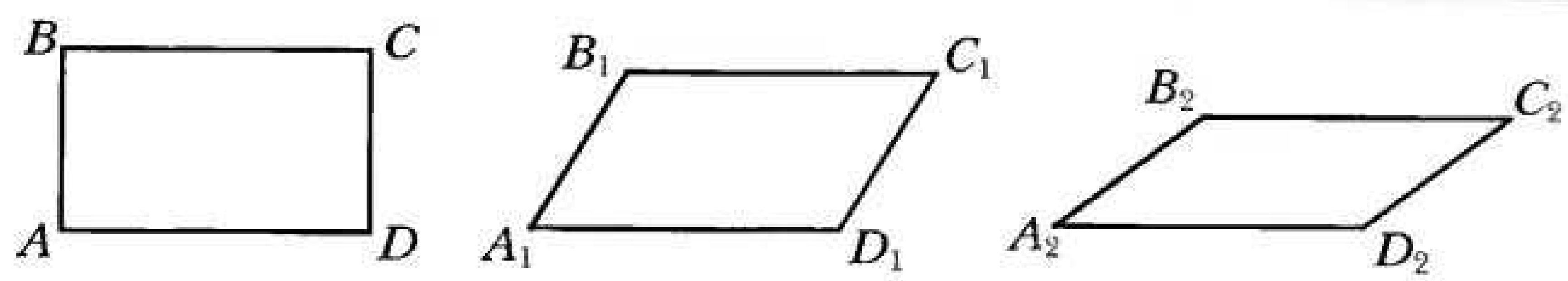
На рисунке 30 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причём $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Так как углы BOC и DOA равны как вертикальные и $AO = OC$, $BO = OD$, то треугольники BOC и DOA равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $BC = AD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Углы 1 и 2 являются накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, $BC \parallel AD$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ две противолежащие стороны равны и параллельны. По теореме 3.2 четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм. ◄

Вы знаете, что треугольник однозначно задаётся своими сторонами, т. е. задача построения треугольника по трём сторонам имеет единственное решение. Иначе обстоит дело с параллелограммом. На рисунке 31 изображены параллелограммы $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, стороны которых равны, т. е. $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ и $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Однако очевидно, что сами параллелограммы не равны. Сказанное означает, что если четыре рейки скрепить так, чтобы образовался параллелограмм, то полученная конструкция не будет жёсткой.

Рис. 31



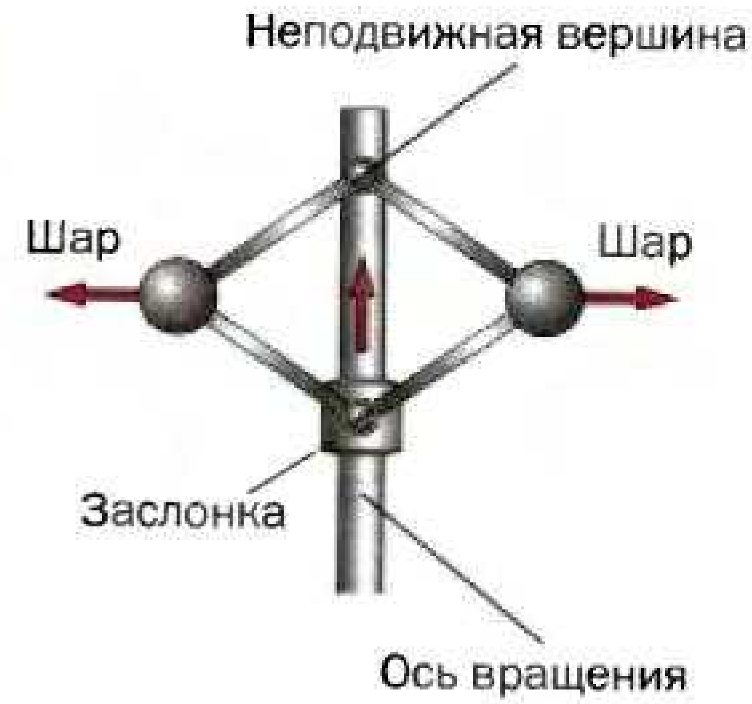
Это свойство параллелограмма широко используется на практике. Благодаря подвижности параллелограмма лампу (рис. 32, *а*) можно устанавливать в удобное для работы положение, а раздвижную решётку (рис. 32, *б*) – отодвигать на нужное расстояние в дверном проёме.

На рисунке 33 изображена схема механизма, являющегося частью паровой машины. При увеличении скорости вращения оси шары отдаляются

Рис. 32

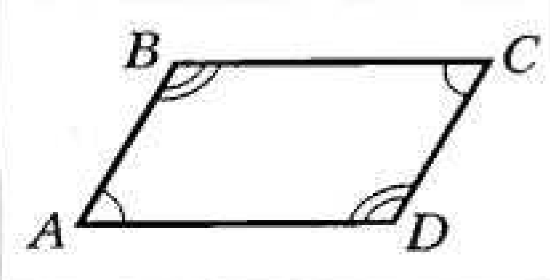
а *б*

Рис. 33



от неё, тем самым поднимая заслонку, которая регулирует количество пара. Механизм назван **параллелограммом Уатта** в честь изобретателя первой универсальной паровой машины.

Рис. 34



Задача. Докажите, что если в четырёхугольнике каждые два противолежащих угла равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Решение. На рисунке 34 изображён четырёхугольник $ABCD$, у которого $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

По теореме о сумме углов четырёхугольника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Учитывая, что $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, получим $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Поскольку углы A и B – односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB и их сумма равна $180°$, то $BC \parallel AD$.

Аналогично доказывают, что $AB \parallel CD$.

Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм. ◄

1. Какие признаки параллелограмма вы знаете? Сформулируйте их.
2. Среди свойств и признаков параллелограмма укажите взаимно обратные теоремы.
3. Какое свойство параллелограмма широко используется на практике?

Упражнения

90. Докажите, что если сумма углов, прилежащих к любой из двух соседних сторон четырёхугольника, равна $180°$, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

91. Четырёхугольники $ABCD$ и $AMKD$ – параллелограммы (рис. 35). Докажите, что четырёхугольник $BMKC$ – параллелограмм.

92. Отрезок AO – медиана треугольника ABD, отрезок BO – медиана треугольника ABC (рис. 36). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Рис. 35

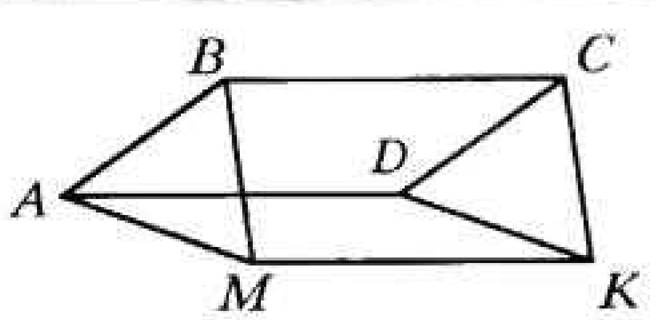
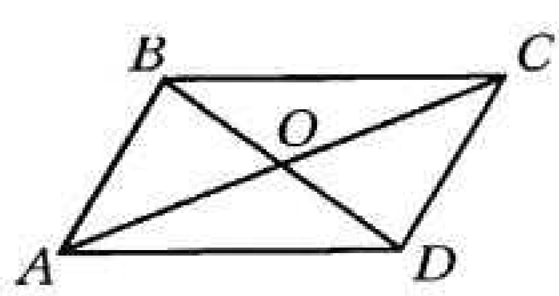


Рис. 36



93. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что четырёхугольник $MBKD$ – параллелограмм.

94. Две окружности имеют общий центр O (рис. 37). В одной из окружностей проведён диаметр AB, в другой – диаметр CD. Докажите, что четырёхугольник $ACBD$ – параллелограмм.

95. Точки E и F – соответственно середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ – параллелограмм.

96. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CK. Докажите, что четырёхугольник $MBKD$ – параллелограмм.

97. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 38) отложены равные отрезки AM, BK, CE и DF. Докажите, что четырёхугольник $MKEF$ – параллелограмм.

98. В треугольнике ABC на продолжении медианы AM за точку M отложили отрезок MK, равный отрезку AM. Определите вид четырёхугольника $ABKC$.

99. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

100. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла C – сторону AD в точке K. Докажите, что четырёхугольник $AMCK$ – параллелограмм.

101. На рисунке 39 четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, $\angle BCP = \angle DAE$. Докажите, что четырёхугольник $APCE$ – параллелограмм.

Рис. 37

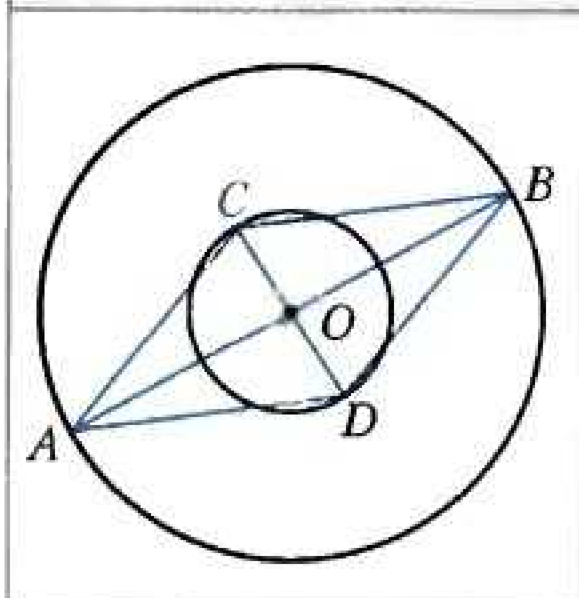


Рис. 38

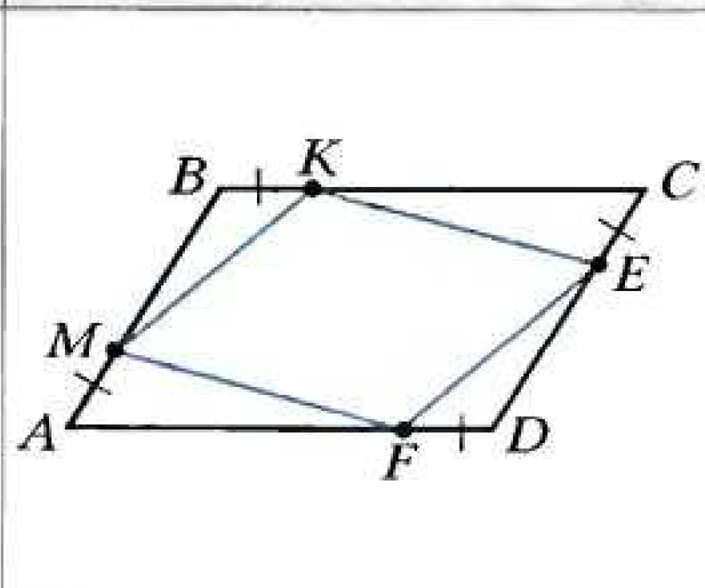
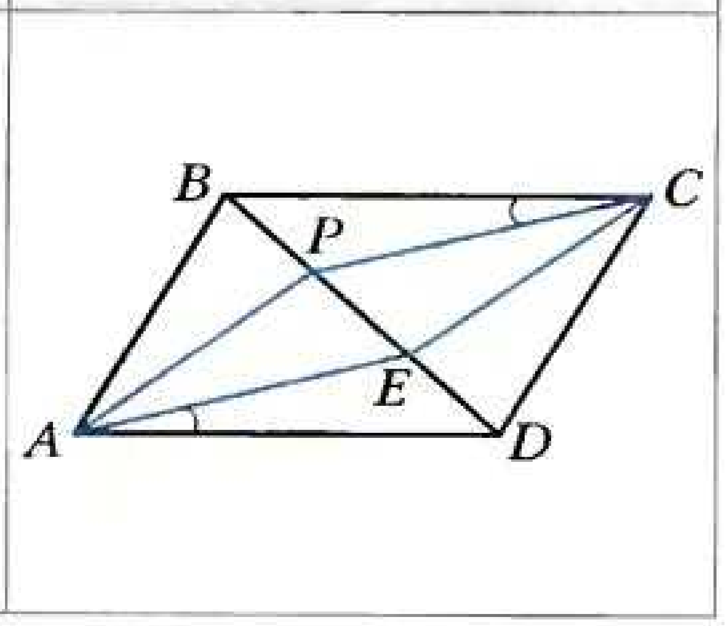
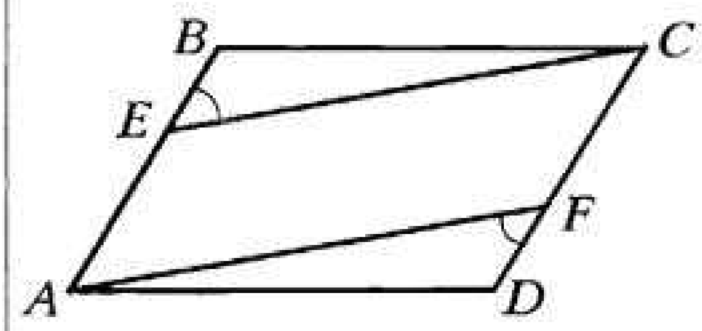


Рис. 39



102. На рисунке 40 четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, $\angle BEC = \angle DFA$. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ – параллелограмм.

Рис. 40



103. Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры BM и DK к диагонали AC. Докажите, что четырёхугольник $BKDM$ – параллелограмм.

104. Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают его диагональ BD в точках E и F соответственно. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ – параллелограмм.

105. Через середину O диагонали NP параллелограмма $MNKP$ проведена прямая, пересекающая стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ANBP$ – параллелограмм.

106. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $CDEF$ проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны CD и EF в точках A и B соответственно, а другая – стороны DE и CF в точках M и K соответственно. Докажите, что четырёхугольник $AMBK$ – параллелограмм.

107. Точки M, N, K и P – середины сторон AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются точки пересечения прямых AN, BK, CP и DM, – параллелограмм.

Упражнения для повторения

108. Прямые, на которых лежат биссектрисы AK и BM треугольника ABC, пересекаются под углом 74°. Найдите $\angle C$.

109. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 8 см. Найдите основание треугольника.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

110. Учитель предложил ученику вырезать из листа картона размером 8 × 8 клеток восемь квадратов размером 2 × 2 клетки при условии не портить клетки, которые остались. Потом оказалось, что нужен ещё один такой квадрат. Всегда ли можно вырезать его из остатков листа?

Когда сделаны уроки

Необходимо и достаточно

Из курса геометрии 7 класса вы узнали, что большинство теорем состоят из двух частей: условия (то, что дано) и заключения (то, что требуется доказать).

Если утверждение, выражающее условие, обозначить буквой A, а утверждение, выражающее заключение, – буквой B, то формулировку теоремы можно изобразить следующей схемой:

если *A*, то *B*.

Например, теорему 2.3 можно сформулировать так:

	A		***B***
если	четырёхугольник является параллелограммом	**, то**	диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам

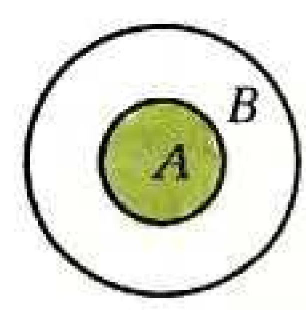
Тогда теорему 3.3, обратную теореме 2.3, формулируют так:

	B		***A***
если	диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам	**, то**	четырёхугольник является параллелограммом

Часто в повседневной жизни в своих высказываниях мы пользуемся словами «необходимо», «достаточно». Приведём несколько примеров.

- Для того чтобы уметь решать задачи, *необходимо* знать теоремы.
- Если вы на математической олимпиаде правильно решили все предложенные задачи, то этого *достаточно* для того, чтобы занять первое место.
- Для того чтобы стрелок попал в мишень B (рис. 41), ему *достаточно* попасть в мишень A, а для того, чтобы попасть в мишень A, *необходимо* попасть в мишень B.

Рис. 41



Употребление слов «необходимо» и «достаточно» тесно связано с теоремами.

Рассмотрим теорему:

	A		***B***
если	натуральное число кратно 10	**, то**	это число кратно 5

Условие A является достаточным для заключения B. Вместе с тем делимость числа нацело на 5 (утверждение B) необходима для делимости числа нацело на 10 (утверждение A).

Приведём ещё один пример.

	A		***B***
если	два угла являются вертикальными	**, то**	эти углы равны

В этой теореме утверждение A является **достаточным условием** для утверждения B, т. е. для того, чтобы два угла были равны, *достаточно*, чтобы они были вертикальными. В этой же теореме утверждение B является **необходимым условием** для утверждения A, т. е. для того, чтобы два угла были вертикальными, *необходимо*, чтобы они были равны. Отметим, что утверждение B не является достаточным условием для утверждения A. Действительно, если два угла равны, то это совсем не означает, что они вертикальные.

Итак, в любой теореме вида **если *A*, то *B*** утверждение A является достаточным для утверждения B, а утверждение B – необходимым для утверждения A.

Если справедлива не только теорема

если *A*, то *B*,

но и обратная теорема

если *B*, то *A*,

то A является **необходимым и достаточным** условием для B, а B – необходимым и достаточным условием для A.

Например, теоремы 3.3 и 2.3 являются взаимно обратными. На языке «необходимо – достаточно» этот факт можно сформулировать так:

для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам.

Подчеркнём, что если в теореме есть слова «необходимо и достаточно», то она объединяет две теоремы: прямую и обратную (прямой теоремой может быть любая из двух теорем, тогда другая будет обратной). Следовательно, доказательство такой теоремы должно состоять из двух частей: доказательств прямой и обратной теорем. Теорему, объединяющую прямую и обратную теоремы, называют **критерием**.

Иногда вместо «необходимо и достаточно» говорят «тогда и только тогда». Например, взаимно обратные теоремы 2.1 и 3.1 можно объединить в следующий критерий:

четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждые две его противолежащие стороны равны.

Сформулируйте самостоятельно теорему 2.2 и ключевую задачу из § 3 в виде теоремы-критерия.

§ 4. Прямоугольник

Параллелограмм – это четырёхугольник, однако очевидно, что не каждый четырёхугольник является параллелограммом. В этом случае говорят, что параллелограммы – это частный вид четырёхугольников. Схема, изображённая на рисунке 42, иллюстрирует этот факт.

Существуют также частные виды параллелограммов. Одним из них является прямоугольник.

Определение

Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

На рисунке 43 изображён прямоугольник $ABCD$.

Из определения следует, что прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма: *в прямоугольнике противолежащие стороны равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

Однако прямоугольник имеет также свои особые свойства, которыми не обладает параллелограмм, отличный от прямоугольника. Так, из определения следует, что все углы прямоугольника равны. Ещё одно свойство прямоугольника выражает следующая теорема.

Теорема 4.1

Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство

На рисунке 44 изображён прямоугольник $ABCD$. Докажем, что его диагонали AC и BD равны.

Рис. 42

Рис. 43

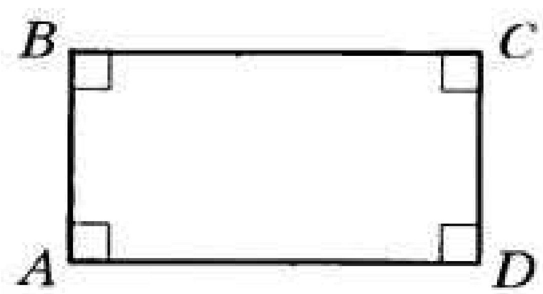
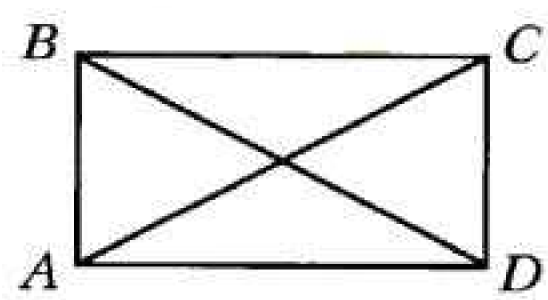


Рис. 44



В прямоугольных треугольниках ABD и DCA катеты AB и DC равны, а катет AD – общий. Поэтому треугольники ABD и DCA равны по двум катетам. Отсюда $BD = AC$. ◂

Определение прямоугольника даёт возможность среди параллелограммов распознавать прямоугольники. Этой же цели служат следующие две теоремы, которые называют признаками прямоугольника.

Теорема 4.2

Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Докажите эту теорему самостоятельно.

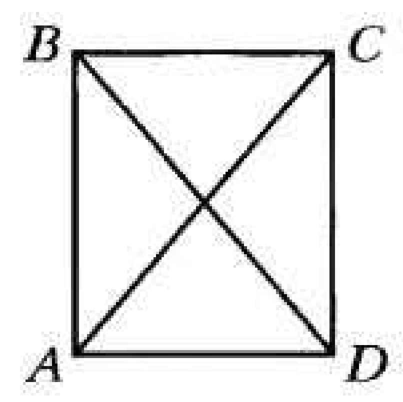
Теорема 4.3

Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство

На рисунке 45 изображён параллелограмм $ABCD$, диагонали AC и BD которого равны. Докажем, что параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник.

Рис. 45



Рассмотрим треугольники ABD и DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, AD – общая сторона. Следовательно, эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle BAD = \angle CDA$. Эти углы являются односторонними при параллельных прямых AB и DC и секущей AD. Следовательно, $\angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$. Тогда $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$. Поэтому по теореме 4.2 параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник. ◂

1. Какую фигуру называют прямоугольником?
2. Какими свойствами обладает прямоугольник?
3. Каким особым свойством обладают диагонали прямоугольника?
4. По каким признакам можно установить, что параллелограмм является прямоугольником?

Практические задания

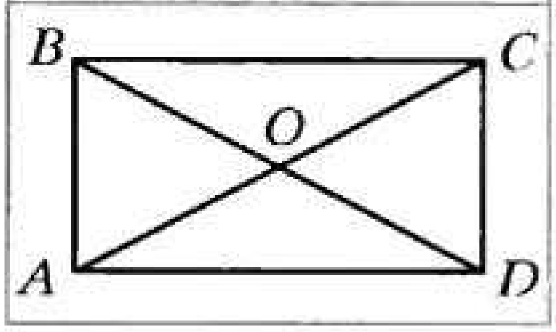
111. Начертите прямоугольник. Пользуясь только линейкой, найдите точку, равноудалённую от его вершин.

Упражнения

112. Докажите, что четырёхугольник, все углы которого прямые, является прямоугольником.

113. Диагонали прямоугольника $ABCD$ (рис. 46) пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и AOD – равнобедренные.

Рис. 46



114. Диагонали прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 46) пересекаются в точке O, $\angle ABD = 64^\circ$. Найдите $\angle COD$ и $\angle AOD$.

115. Диагонали прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 46) пересекаются в точке O, $\angle ADB = 30^\circ$, $BD = 10$ см. Найдите периметр треугольника AOB.

116. Угол между диагоналями прямоугольника равен 60°, а меньшая сторона прямоугольника равна 8 см. Найдите диагональ прямоугольника.

117. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CK (точка M лежит между точками A и K). Докажите, что четырёхугольник $BKDM$ – параллелограмм, отличный от прямоугольника.

118. На продолжении диагонали BD прямоугольника $ABCD$ за точку B отметили точку E, а на продолжении за точку D – точку F так, что $BE = DF$. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ – параллелограмм, отличный от прямоугольника.

119. Точка M – середина стороны BC прямоугольника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямоугольника равен 36 см. Найдите стороны прямоугольника.

120. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 30 см. Биссектрисы углов A и D пересекаются в точке M, принадлежащей стороне BC. Найдите стороны прямоугольника.

121. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 55 см. Прямоугольник $ABCD$ построен так, что две его вершины A и D принадлежат гипотенузе, а две другие – катетам данного треугольника. Найдите стороны прямоугольника, если $AB : BC = 3 : 5$.

122. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 6$ см. Прямоугольник $CMKN$ построен так, что точка M принадлежит катету AC, точка N – катету BC, а точка K – гипотенузе AB. Найдите периметр прямоугольника $CMKN$.

123. Докажите, что если диагонали параллелограмма образуют равные углы с одной из его сторон, то этот параллелограмм является прямоугольником.

124. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине.

125. Постройте прямоугольник:
1) по двум сторонам;
2) по диагонали и углу между диагональю и стороной.

126. Постройте прямоугольник:
1) по стороне и диагонали;
2) по диагонали и углу между диагоналями.

127. Серединный перпендикуляр диагонали AC прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Найдите углы, на которые диагональ прямоугольника делит его угол.

128. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Найдите расстояние от точки C до диагонали BD.

129. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, у которого соседние стороны не равны, пересекаясь, образуют прямоугольник.

130. Постройте прямоугольник по стороне и углу между диагоналями, противолежащему данной стороне.

131. Постройте прямоугольник:
1) по диагонали и разности двух сторон;
2) по периметру и диагонали;
3) по периметру и углу между диагоналями.

Упражнения для повторения

132. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 48^\circ$, отрезки AK и BM — его высоты. Найдите угол между прямыми AK и BM.

133. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle A = \angle CBD$. Найдите угол ABC, если треугольники ABD и BCD ещё имеют равные углы.

134. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку C проведена прямая, которая параллельна прямой AD и пересекает прямую AB в точке E. Определите вид треугольника ACE.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

135. На плоскости отметили 1000 точек. Докажите, что существует прямая, относительно которой в каждой полуплоскости лежат по 500 точек.

§ 5. Ромб

Вы уже знаете, что прямоугольник – это частный вид параллелограмма. Познакомимся ещё с одним видом параллелограмма – ромбом.

Определение

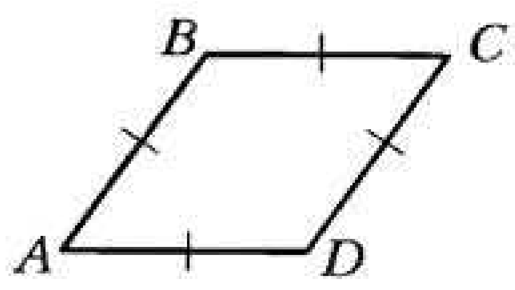
Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

На рисунке 47 изображён ромб $ABCD$.

Из определения следует, что ромб обладает всеми свойствами параллелограмма: *в ромбе противолежащие углы равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

Однако ромб имеет и свои особые свойства.

Рис. 47



Теорема 5.1

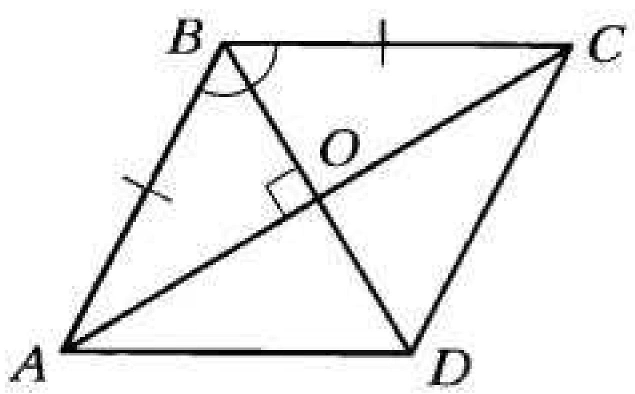
Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Доказательство

На рисунке 48 изображён ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $BD \perp AC$ и $\angle ABO = \angle CBO$.

Так как по определению ромба все его стороны равны, то треугольник ABC – равнобедренный ($AB = BC$). По свойству диагоналей параллелограмма $AO = OC$. Тогда отрезок BO является медианой треугольника ABC, а значит, и высотой и биссектрисой этого треугольника. Следовательно, $BD \perp AC$ и $\angle ABO = \angle CBO$. ◂

Рис. 48



Распознавать ромбы среди параллелограммов позволяет не только определение ромба, но и следующие две теоремы, которые называют признаками ромба.

Теорема 5.2

Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

3 — 748

Теорема 5.3

Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

Докажите эти теоремы самостоятельно.

1. Какую фигуру называют ромбом?
2. Какими свойствами обладает ромб?
3. Какими особыми свойствами обладают диагонали ромба?
4. По каким признакам можно установить, что параллелограмм является ромбом?

Практические задания

136. Начертите ромб со стороной 5 см и углом 40°. Проведите две высоты из вершины его острого угла и две высоты из вершины тупого угла.

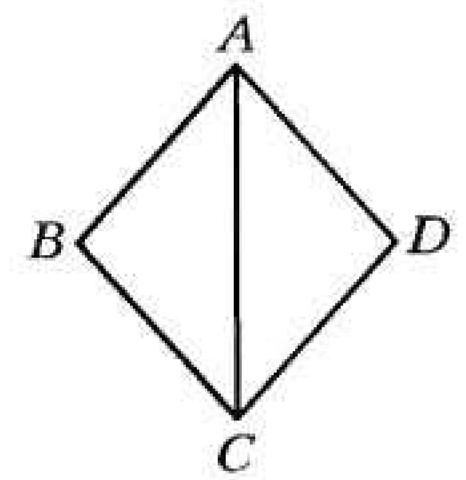
Упражнения

137. Докажите, что если две соседние стороны параллелограмма равны, то он является ромбом.

138. Докажите, что четырёхугольник, все стороны которого равны, является ромбом.

139. Диагональ AC ромба $ABCD$ (рис. 49) образует со стороной AD угол 42°. Найдите все углы ромба.

Рис. 49



140. В ромбе $ABCD$ известно, что $\angle C = 140°$, а диагонали пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника AOB.

141. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Найдите углы ромба.

142. Найдите углы ромба, если его периметр равен 24 см, а высота равна 3 см.

143. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

144. Угол D ромба $ABCD$ в 8 раз больше угла CAD. Найдите $\angle BAD$.

145. Углы, которые сторона ромба образует с его диагоналями, относятся как 2 : 7. Найдите углы ромба.

146. Точки M и K – соответственно середины сторон AB и BC ромба $ABCD$. Докажите, что $MD = KD$.

147. Точки E и F – соответственно середины сторон BC и CD ромба $ABCD$. Докажите, что $\angle EAC = \angle FAC$.

148. Докажите, что высоты ромба равны.

149. Высота ромба, проведённая из вершины его тупого угла, делит сторону ромба пополам. Меньшая диагональ ромба равна 4 см. Найдите углы и периметр ромба.

150. Докажите, что диагональ ромба делит пополам угол между высотами ромба, проведёнными из той же вершины, что и диагональ.

151. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отложены равные отрезки AE и AF соответственно. Докажите, что $\angle CEF = \angle CFE$.

152. Отрезок AM – биссектриса треугольника ABC. Через точку M проведены прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке K, и прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке D. Докажите, что $AM \perp DK$.

153. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекают его стороны BC и AD в точках F и E соответственно. Определите вид четырёхугольника $ABFE$.

154. В треугольнике ABC проведён серединный перпендикуляр его биссектрисы BD, который пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Определите вид четырёхугольника $BKDP$.

155. Постройте ромб:
1) по стороне и углу;
2) по двум диагоналям;
3) по высоте и углу.

156. Постройте ромб:
1) по стороне и диагонали;
2) по высоте и диагонали.

157. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC и AD отметили соответственно точки M и K так, что образовался ромб $AMCK$. Найдите сторону этого ромба.

158. Постройте ромб по диагонали и углу ромба, вершина которого принадлежит этой диагонали.

159. Постройте ромб по диагонали и противолежащему ей углу ромба.

160. Постройте ромб:
1) по сумме диагоналей и углу между диагональю и стороной;
2) по острому углу и разности диагоналей;
3) по острому углу и сумме стороны и высоты;
4) по стороне и сумме диагоналей;
5) по тупому углу и сумме диагоналей;
6) по стороне и разности диагоналей.

161. Даны точки M, N и K. Постройте ромб $ABCD$ так, чтобы точка M была серединой стороны AB, а точки N и K – основаниями высот, проведённых из вершины B к стороне AD и из вершины D к стороне BC соответственно.

Упражнения для повторения

162. На сторонах угла с вершиной в точке A отложены равные отрезки AB и AC. Через точки B и C проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC соответственно, которые пересекаются в точке D. Докажите, что луч AD является биссектрисой угла BAC.

163. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отметили точку D так, что $AD = AB$, а на продолжении этой стороны за точку C – точку E так, что $CE = BC$. Найдите углы и периметр треугольника ABC, если $DE = 18$ см, $\angle BDA = 15^\circ$, $\angle BEC = 36^\circ$.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

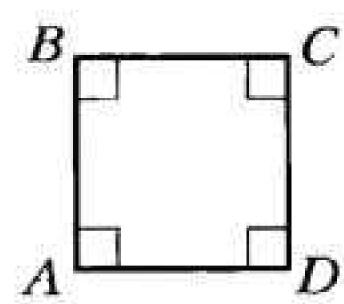
164. На бумаге в клетку выбрали произвольно 100 клеток. Докажите, что среди них можно найти не менее 25 клеток, не имеющих общих точек.

§ 6. Квадрат

Определение

Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны.

Рис. 50



На рисунке 50 изображён квадрат $ABCD$.

Из определения следует, что квадрат – это ромб, у которого все углы равны. Значит, квадрат является частным видом и прямоугольника, и ромба. Это иллюстрирует схема, изображённая на рисунке 51. Поэтому квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Отсюда следует, что *все углы квадрата прямые; диагонали квадрата равны, перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

1. Какую фигуру называют квадратом?
2. Какой ромб является квадратом?
3. Какими свойствами обладает квадрат?

Упражнения

165. Докажите, что если один из углов ромба прямой, то этот ромб является квадратом.

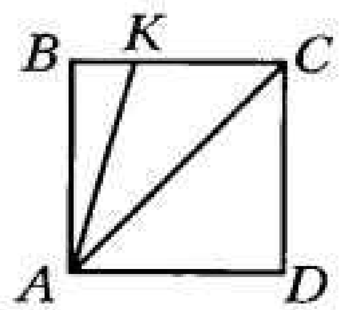
166. Докажите, что если две соседние стороны прямоугольника равны, то этот прямоугольник является квадратом.

167. Диагональ BD квадрата $ABCD$ равна 5 см. Какова длина диагонали AC? Чему равны углы треугольника AOB, где точка O – точка пересечения диагоналей квадрата?

168. На стороне BC квадрата $ABCD$ (рис. 52) отметили точку K так, что $\angle AKB = 74^\circ$. Найдите $\angle CAK$.

Рис. 51

Рис. 52



169. На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку K так, что $AK = 2BK$. Найдите $\angle KAD$.

170. Верно ли утверждение:

1) любой квадрат является параллелограммом;
2) любой ромб является квадратом;
3) любой прямоугольник является квадратом;
4) любой квадрат является прямоугольником;
5) любой квадрат является ромбом;
6) если диагонали четырёхугольника равны, то он является прямоугольником;
7) если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то он является ромбом;
8) существует ромб, который является прямоугольником;
9) существует квадрат, который не является ромбом;
10) если диагонали четырёхугольника не перпендикулярны, то он не является ромбом;
11) если диагонали параллелограмма не равны, то он не является прямоугольником;

12) если диагональ прямоугольника делит его угол пополам, то этот прямоугольник является квадратом?

171. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Докажите, что точки пересечения этих прямых являются вершинами квадрата.

172. В прямоугольном треугольнике через точку пересечения биссектрисы прямого угла и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что образовавшийся четырёхугольник является квадратом.

173. Точки M, K, N, P являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $MKNP$ – квадрат.

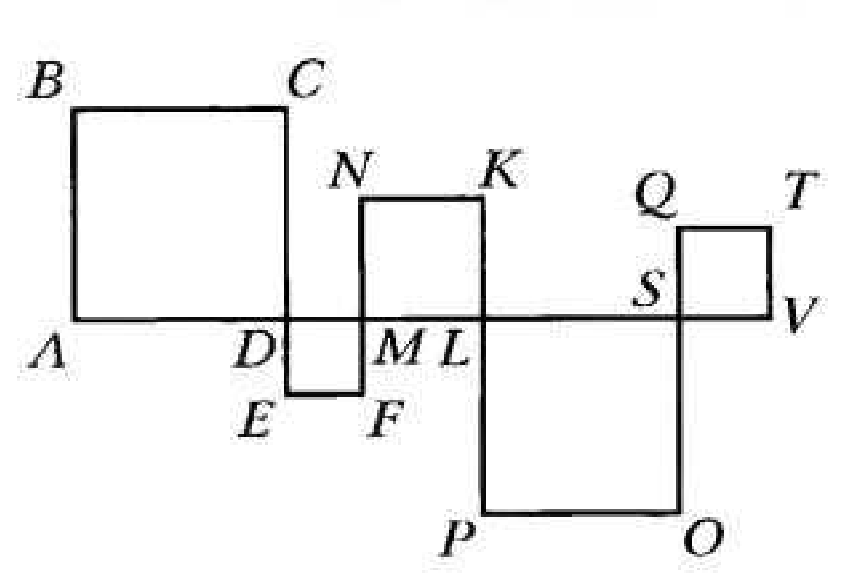
174. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Две стороны квадрата $CDEF$ лежат на катетах треугольника ABC, а вершина E принадлежит гипотенузе AB. Найдите периметр квадрата $CDEF$.

175. В квадрате $ABCD$ отметили точку M так, что треугольник AMB – равносторонний. Докажите, что треугольник CMD – равнобедренный.

176. Докажите, что если диагонали параллелограмма равны и перпендикулярны, то этот параллелограмм является квадратом.

177. Четырёхугольники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ – квадраты (рис. 53). Найдите сумму длин сторон квадратов, которые не лежат на прямой AV, если длина отрезка AV равна 16 см.

Рис. 53



178. Постройте квадрат по его стороне.

179. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов прямоугольника, не являющегося квадратом, являются вершинами квадрата.

180. Вершины M и K равностороннего треугольника AMK принадлежат сторонам BC и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MK \parallel BD$.

181. Даны точки M и K. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы точка M была серединой стороны AB, а точка K – серединой стороны BC.

182. Через произвольную точку, принадлежащую квадрату, проведены две перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противолежащие стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, принадлежащие квадрату, равны.

183. Постройте квадрат:
1) по сумме диагонали и стороны;
2) по разности диагонали и стороны.

184. В квадрате $ABCD$ отмечена точка O так, что $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Докажите, что треугольник BOC – равносторонний.

185. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и E так, что углы BAM и MAE равны. Докажите, что $AE = BM + DE$.

Упражнения для повторения

186. На рисунке 54 $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Докажите, что $BE \perp DE$.

187. На рисунке 55 $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Докажите, что $EF \parallel BC$.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

188. Расположите на плоскости восемь точек так, чтобы на серединном перпендикуляре любого отрезка с концами в этих точках лежали ровно две из этих точек.

§ 7. Средняя линия треугольника

Определение

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рисунке 56 отрезки MN, NE, EM – средние линии треугольника ABC.

Рис. 54

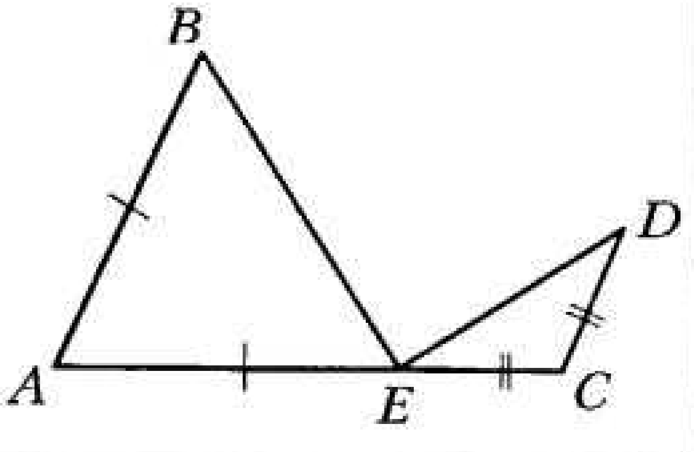


Рис. 55

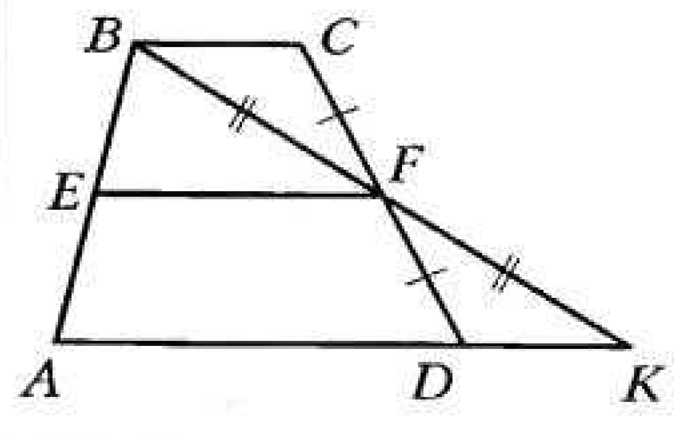
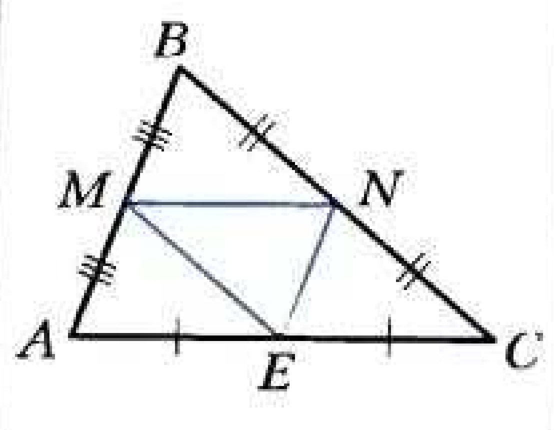


Рис. 56



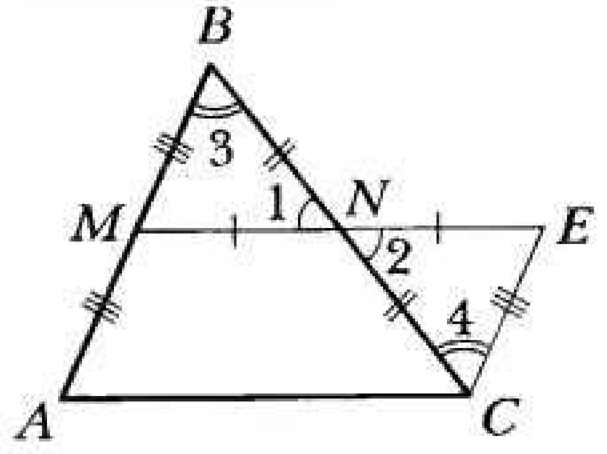
Теорема 7.1

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Доказательство

Пусть MN – средняя линия треугольника ABC (рис. 57). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Рис. 57



На прямой MN отметим точку E так, что $MN = NE$ (*см.* рис. 57). Соединим точки E и C. Поскольку точка N является серединой отрезка BC, то $BN = NC$. Кроме того, углы 1 и 2 равны как вертикальные. Следовательно, треугольники MBN и ECN равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $MB = EC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Учитывая, что $AM = MB$, получим: $EC = AM$. Углы 3 и 4 являются накрест лежащими при прямых AB и EC и секущей BC. Тогда $AB \parallel EC$.

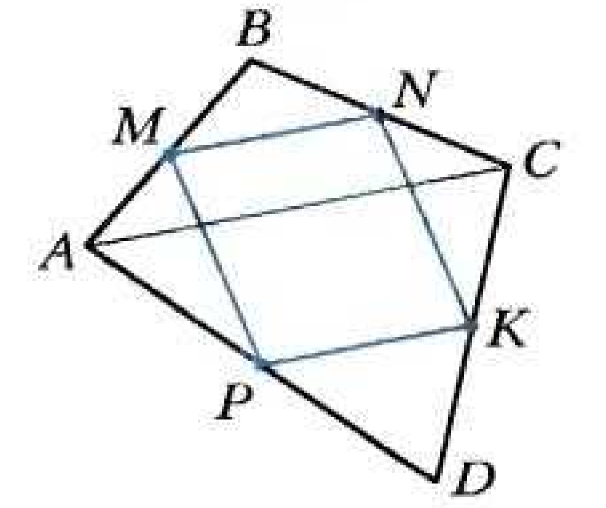
Таким образом, в четырёхугольнике $AMEC$ стороны AM и EC параллельны и равны. Следовательно, по теореме 3.2 четырёхугольник $AMEC$ является параллелограммом. Отсюда $ME \parallel AC$, т. е. $MN \parallel AC$.

Также $ME = AC$. Так как $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$. ◄

Задача. Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. В четырёхугольнике $ABCD$ точки M, N, K и P – середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 58).

Рис. 58



Отрезок MN – средняя линия треугольника ABC. По свойству средней линии $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Отрезок PK – средняя линия треугольника ADC. По свойству средней линии $PK \parallel AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$.

Так как $MN \parallel AC$ и $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$.

Из того, что $MN = \frac{1}{2}AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$, получаем: $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Следовательно, в четырёхугольнике $MNKP$ стороны MN и PK равны и параллельны, а значит, четырёхугольник $MNKP$ – параллелограмм. ◂

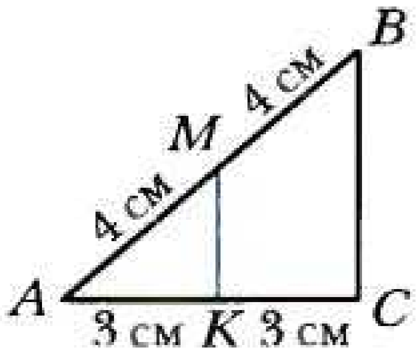
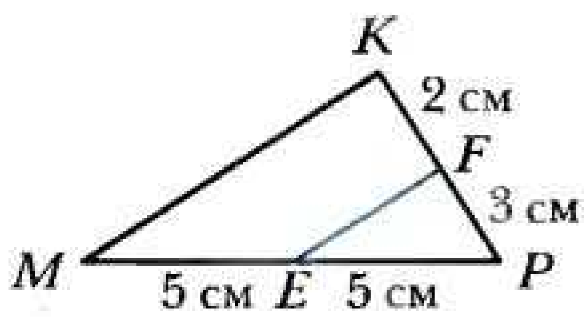
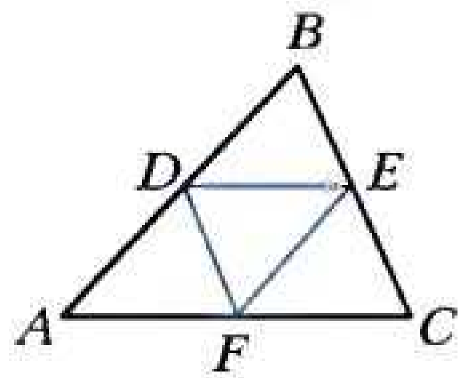
1. Что называют средней линией треугольника?
2. Сколько средних линий можно провести в треугольнике?
3. Какими свойствами обладает средняя линия треугольника?

Упражнения

189. Является ли отрезок MK средней линией треугольника ABC (рис. 59)?

190. Является ли отрезок EF средней линией треугольника MKP (рис. 60)?

191. Отрезки DE и DF – средние линии треугольника ABC (рис. 61). Является ли отрезок EF средней линией этого треугольника?

Рис. 59	Рис. 60	Рис. 61
		

192. Стороны треугольника равны 6 см, 8 см и 12 см. Найдите средние линии этого треугольника.

193. Точки M и K – середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника MAK равен 17 см.

194. Докажите, что периметр треугольника, стороны которого являются средними линиями треугольника ABC, равен половине периметра треугольника ABC.

195. Определите вид треугольника, в котором средние линии равны между собой.

196. Докажите, что средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.

197. Точки E и F являются соответственно серединами сторон AB и BC треугольника ABC. Найдите сторону AC, если она на 7 см больше отрезка EF.

198. Докажите, что средняя линия DE треугольника ABC (точки D и E принадлежат сторонам AB и BC соответственно) и его медиана BM точкой пересечения делятся пополам.

199. Докажите, что высота AM треугольника ABC перпендикулярна его средней линии, соединяющей середины сторон AB и AC.

200. Найдите углы треугольника, две средние линии которого равны и перпендикулярны.

201. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 6 см. Найдите стороны данного треугольника, если его периметр равен 46 см.

202. Сумма диагоналей четырёхугольника равна 28 см. Найдите периметр четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон данного четырёхугольника.

203. Вершинами четырёхугольника являются середины сторон ромба с диагоналями 8 см и 14 см. Определите вид четырёхугольника и найдите его стороны.

204. Вершинами четырёхугольника являются середины сторон прямоугольника с диагональю 12 см. Определите вид четырёхугольника и найдите его стороны.

205. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, на которой лежит его средняя линия.

206. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и K так, что $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Докажите, что $MK \parallel AC$, и найдите MK, если $AC = 16$ см.

207. Углы BAD и BCE – внешние углы треугольника ABC. Из вершины B проведены перпендикуляры BM и BK к биссектрисам углов BAD и BCE соответственно. Найдите отрезок MK, если периметр треугольника ABC равен 18 см.

208. Постройте треугольник по серединам трёх его сторон.

209. Постройте параллелограмм по серединам трёх его сторон.

210. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные соответственно сторонам DC и BC. Докажите, что точка пересечения проведённых прямых принадлежит прямой AC.

211. Стороны AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны. Через середины диагоналей AC и BD проведена прямая, которая пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Докажите, что $\angle BMN = \angle CNM$.

Упражнения для повторения

212. К окружности с центром O через точку C проведены касательные CA и CB (A и B – точки касания). Отрезок AD – диаметр окружности. Докажите, что $BD \parallel CO$.

213. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle B = 32°$, AK – биссектриса треугольника. Через точку K проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает сторону AC в точке M. Найдите угол AKM.

214. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ является его высотой и равна стороне BC. Найдите сторону CD параллелограмма, если точка B удалена от прямой CD на 4 см.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

215. Пять точек принадлежат равностороннему треугольнику, сторона которого равна 1 см. Докажите, что из этих точек можно выбрать две, расстояние между которыми не более 0,5 см.

§ 8. Трапеция

Определение

Трапецией называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Каждый из четырёхугольников, изображённых на рисунке 62, является трапецией.

Параллельные стороны трапеции называют **основаниями**, а непараллельные – **боковыми сторонами** (рис. 63).

Рис. 62

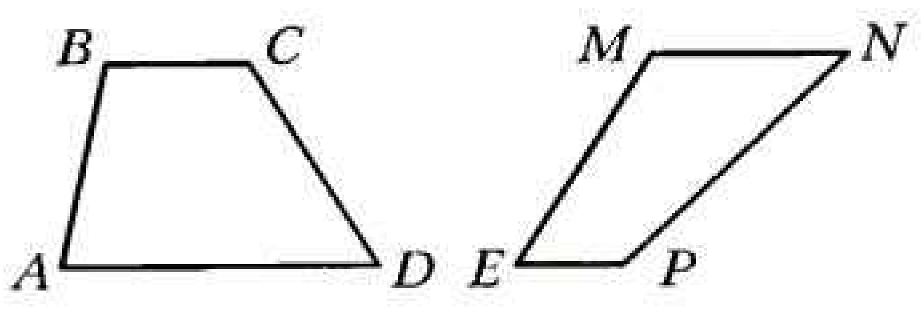


Рис. 63

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) углы A и D называют **углами при основании** AD, а углы B и C – углами при основании BC.

Определение

Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

На рисунке 64 каждый из отрезков BM, EF, DK, PQ является высотой трапеции $ABCD$. Длины этих отрезков равны расстоянию между параллельными прямыми BC и AD. Поэтому $BM = EF = DK = PQ$.

Рис. 64

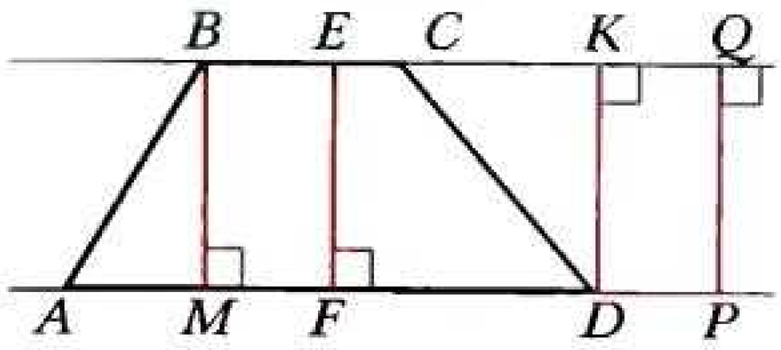


Рис. 65

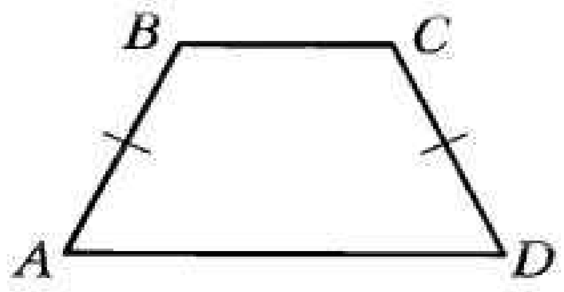
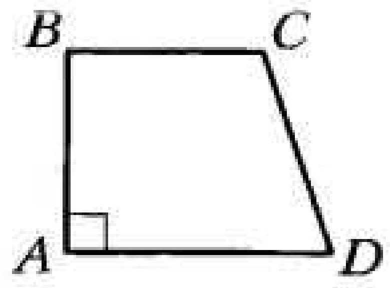


Рис. 66



На рисунке 65 изображена трапеция $ABCD$, у которой боковые стороны AB и CD равны. Такую трапецию называют **равнобокой** или **равнобедренной**.

Если боковая сторона трапеции является её высотой, то такую трапецию называют **прямоугольной** (рис. 66).

Трапеция – это частный вид четырёхугольника. Связь между четырёхугольниками и их частными видами показана на рисунке 67.

Рис. 67

Определение

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

На рисунке 68 отрезок MN – средняя линия трапеции $ABCD$.

Теорема 8.1

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

Пусть MN – средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 69). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Рис. 68

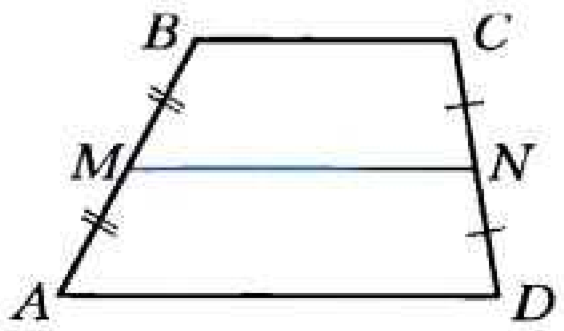
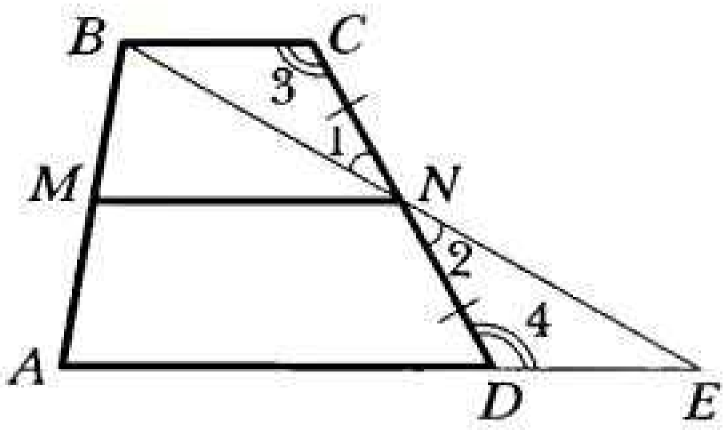


Рис. 69



Проведём прямую BN и точку её пересечения с прямой AD обозначим буквой E.

Поскольку точка N – середина отрезка CD, то $CN = ND$. Кроме того, углы 1 и 2 равны как вертикальные, а углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AE и секущей CD. Следовательно, треугольники BCN и EDN равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $BC = DE$ и $BN = NE$. Тогда отрезок MN – средняя линия треугольника ABE. Из этого следует, что $MN \parallel AE$, т. е. $MN \parallel AD$, и $MN = \frac{1}{2}AE$. Имеем:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). ◄$$

Задача (свойства равнобокой трапеции). Докажите, что в равнобокой трапеции:

1) углы при каждом основании равны;

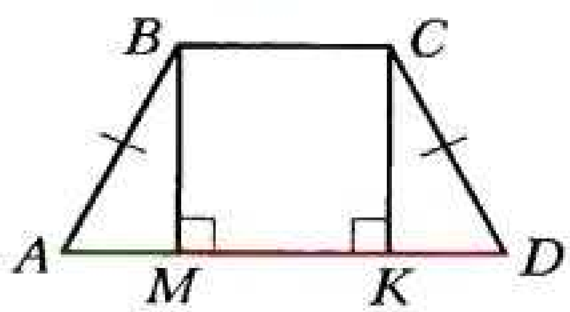
2) диагонали равны;

3) высота трапеции, проведённая из вершины тупого угла, делит основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равен полуразности оснований, а больший – полусумме оснований (средней линии трапеции).

Решение. Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведём высоты BM и CK (рис. 70). Так как $AB = CD$ и $BM = CK$, то прямоугольные треугольники AMB и DKC равны по катету и гипотенузе. Тогда $\angle A = \angle D$.

Рис. 70

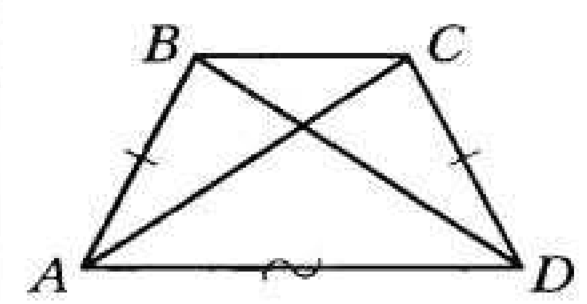


Имеем: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle DCB$.

2) Рассмотрим треугольники ACD и DBA (рис. 71).

Имеем: $AB = CD$, AD – общая сторона, углы BAD и CDA равны как углы при основании равнобокой трапеции. Следовательно, треугольники ACD и DBA равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $AC = BD$.

Рис. 71



3) В четырёхугольнике $BMKC$ (*см.* рис. 70) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, $\angle BMK$ – прямой. Следовательно, этот четырёхугольник – прямоугольник. Отсюда $MK = BC$.

Из равенства треугольников AMB и DKC следует, что $AM = KD$. Тогда

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$ ◄

1. Какой четырёхугольник называют трапецией?

2. Какие стороны трапеции называют основаниями? Боковыми сторонами?

3. Что называют высотой трапеции?

4. Какие существуют виды трапеций?

5. Какую трапецию называют равнобокой?

6. Какую трапецию называют прямоугольной?

7. Что называют средней линией трапеции?

8. Сформулируйте теорему о свойствах средней линии трапеции.

9. Сформулируйте свойства равнобокой трапеции.

Практические задания

216. Начертите по клеткам тетради трапецию:

1) равнобокую;

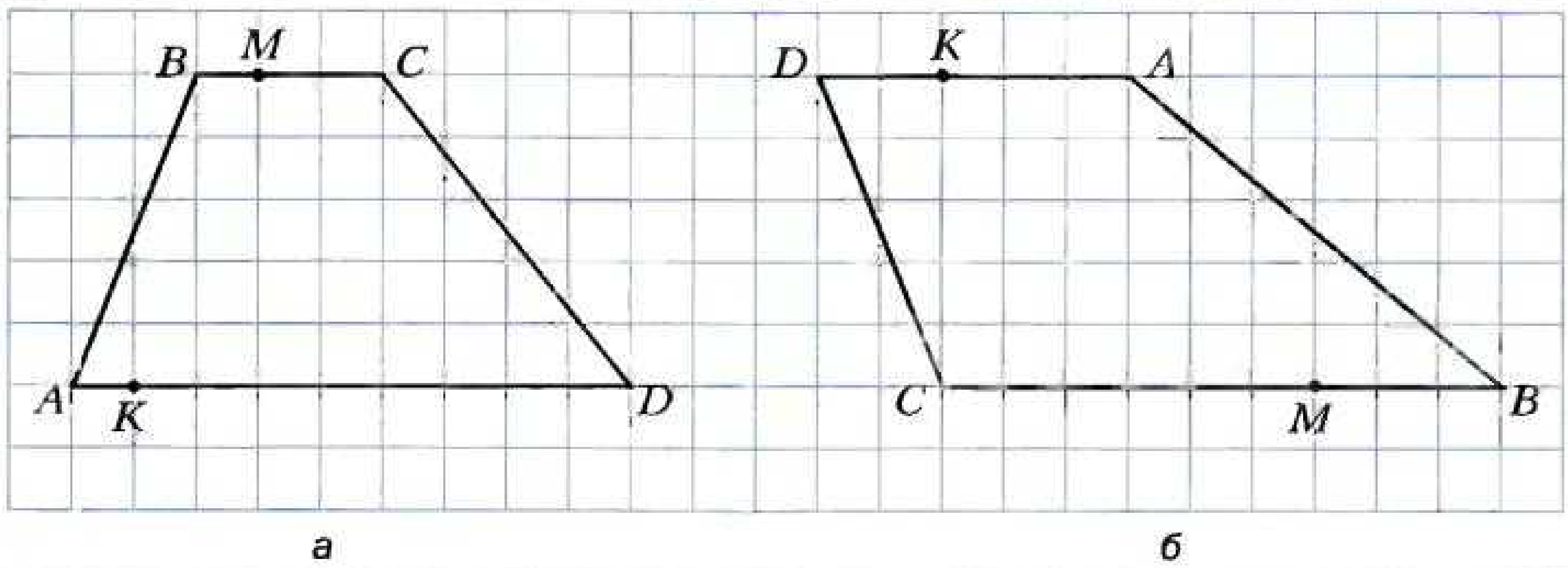
2) прямоугольную;

3) не являющуюся ни прямоугольной, ни равнобокой;

4) у которой один из углов при основании острый, а другой – тупой.

217. Перерисуйте в тетрадь рисунок 72, проведите высоты трапеции, одним из концов которых являются соответственно точки B, M, K и D.

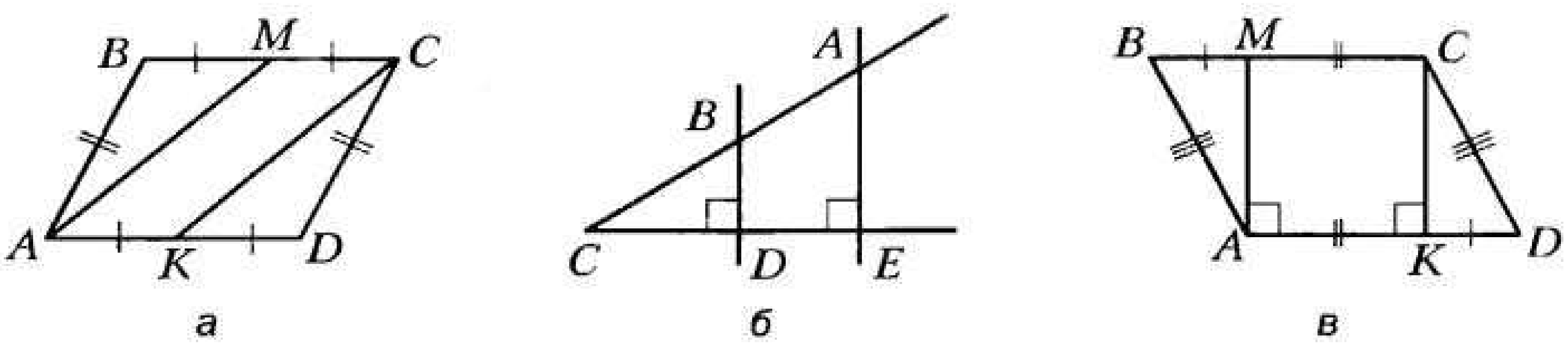
Рис. 72



Упражнения

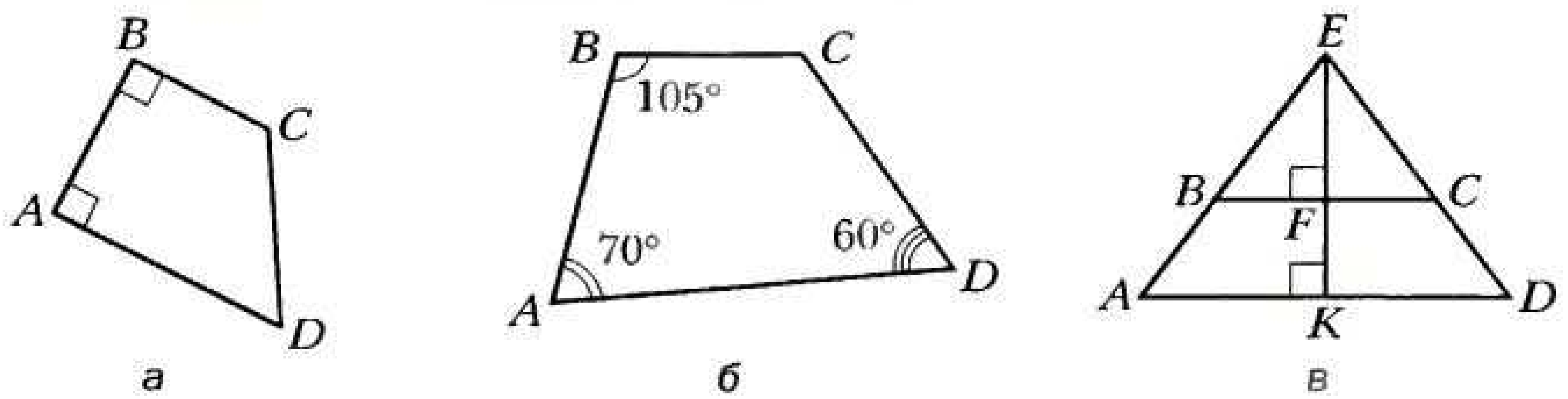
218. Найдите на рисунке 73 трапеции, укажите их основания и боковые стороны.

Рис. 73



219. Является ли четырёхугольник $ABCD$, изображённый на рисунке 74, трапецией? В случае утвердительного ответа укажите основания и боковые стороны трапеции.

Рис. 74



220. Периметр равнобокой трапеции равен 52 см, основания – 13 см и 21 см. Найдите боковую сторону трапеции.

221. Периметр трапеции равен 49 см, боковые стороны – 5,6 см и 7,8 см. Найдите основания трапеции, если одно из них на 7,4 см больше другого.

222. Найдите углы A и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle B = 132^\circ$, $\angle D = 24^\circ$.

223. Найдите углы трапеции $ABCD$, прилежащие к боковой стороне AB, если угол A меньше угла B на 38°.

224. Найдите углы трапеции $ABCD$, прилежащие к боковой стороне CD, если $\angle C : \angle D = 8 : 7$.

225. Один из углов равнобокой трапеции равен 46°. Найдите остальные её углы.

226. Найдите углы равнобокой трапеции, если разность её противолежащих углов равна 20°.

227. В равнобокой трапеции угол между боковой стороной и высотой, проведённой из вершины тупого угла, равен 23°. Найдите углы трапеции.

228. Могут ли у трапеции быть:
1) три прямых угла;
2) три острых угла;
3) два противолежащих угла тупыми;
4) два противолежащих угла прямыми;
5) два противолежащих угла равными?

229. Могут ли:
1) основания трапеции быть равными;
2) диагонали трапеции точкой пересечения делиться пополам?

230. Докажите, что если углы при одном из оснований трапеции равны, то данная трапеция является равнобокой.

231. Докажите, что сумма противолежащих углов равнобокой трапеции равна 180°. Верно ли обратное утверждение: если сумма противолежащих углов трапеции равна 180°, то данная трапеция равнобокая?

232. Средняя линия равностороннего треугольника со стороной 6 см разбивает его на треугольник и четырёхугольник. Определите вид четырёхугольника и найдите его периметр.

233. Высота равнобокой трапеции, проведённая из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите основания трапеции.

234. Один из углов равнобокой трапеции равен 60°, боковая сторона равна 18 см, а сумма оснований – 50 см. Найдите основания трапеции.

235. Основания прямоугольной трапеции равны 10 см и 24 см, а один из углов — 45°. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

236. Основания прямоугольной трапеции равны 7 см и 15 см, а один из углов — 60°. Найдите бо́льшую боковую сторону трапеции.

237. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Найдите углы ACB и ACD.

238. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Найдите углы трапеции.

239. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 6 см. Через вершину B проведена прямая, которая параллельна стороне CD и пересекает сторону AD в точке M. Найдите периметр трапеции, если периметр треугольника ABM равен 16 см.

240. Через вершину C трапеции $ABCD$ проведена прямая, которая параллельна боковой стороне AB и пересекает большее основание AD в точке E. Найдите углы трапеции, если $\angle D = 35°$, $\angle DCE = 65°$.

241. Основания трапеции равны 9 см и 15 см. Чему равна её средняя линия?

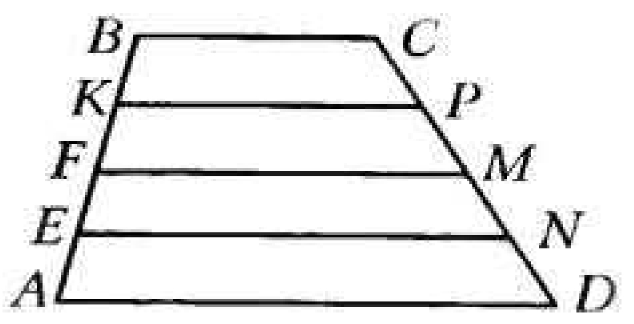
242. Средняя линия трапеции равна 8 см, а одно из оснований — 5 см. Найдите второе основание трапеции.

243. Одно из оснований трапеции на 8 см больше другого, а средняя линия равна 17 см. Найдите основания трапеции.

244. Основания трапеции относятся как 3 : 4, а средняя линия равна 14 см. Найдите основания трапеции.

245. Каждая из боковых сторон трапеции $ABCD$ (рис. 75) разделена на четыре равные части: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Найдите отрезки EN, FM и KP, если $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

Рис. 75



246. Высота прямоугольной трапеции, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки длиной 7 см и 5 см, считая от вершины прямого угла. Найдите среднюю линию трапеции.

247. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9 см, а высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, один из которых в 2 раза больше другого, считая от вершины прямого угла. Найдите основания трапеции.

248. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = OD$ и $BO = OC$.

249. Высота равнобокой трапеции равна h, а боковая сторона видна из точки пересечения диагоналей под углом* 60°. Найдите диагональ трапеции.

250. Основания равнобокой трапеции относятся как $2 : 5$, а диагональ делит тупой угол трапеции пополам. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен 68 см.

251. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр равен 60 см. Найдите неизвестные стороны трапеции.

252. Стороны трапеции равны a, a, a и $2a$. Найдите углы трапеции.

253. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла BAD, $\angle D = 60^\circ$, периметр трапеции равен 40 см. Найдите основания трапеции.

254. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, а меньшее основание равно боковой стороне. Найдите углы трапеции.

255. При каком условии высота равнобокой трапеции равна полуразности оснований?

256. Постройте равнобокую трапецию по основанию, боковой стороне и углу между ними.

257. Постройте прямоугольную трапецию по основаниям и меньшей боковой стороне.

258. Постройте равнобокую трапецию по основанию, боковой стороне и диагонали.

259. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 6 см, большее основание – 10 см. Найдите среднюю линию трапеции, если один из её углов равен 60°.

260. Диагональ равнобокой трапеции равна 14 см и образует с основанием угол 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

261. Средняя линия трапеции $ABCD$ разбивает её на две трапеции, средние линии которых равны 15 см и 19 см. Найдите основания трапеции $ABCD$.

262. Докажите, что если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то её высота равна средней линии трапеции.

263. Докажите, что если высота равнобокой трапеции равна её средней линии, то диагонали трапеции перпендикулярны.

264. Диагональ прямоугольной трапеции разбивает её на два треугольника, один из которых является равносторонним со стороной a. Найдите среднюю линию трапеции.

* Пусть даны отрезок AB и точка M вне прямой AB такая, что $\angle AMB = \alpha$. В таком случае говорят, что отрезок AB виден из точки M под углом α.

265. Диагональ равнобокой трапеции разбивает её на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

266. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

267. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, принадлежит прямой, которая содержит её среднюю линию.

268. Постройте трапецию:

1) по основаниям и боковым сторонам;
2) по основанию, высоте и диагоналям;
3) по разности оснований, боковым сторонам и диагонали.

269. Постройте равнобокую трапецию по основанию, высоте и боковой стороне.

270. Постройте трапецию:

1) по основаниям и диагоналям;
2) по боковым сторонам, средней линии и высоте;
3) по основанию, прилежащему к нему углу и боковым сторонам;
4) по боковым сторонам, высоте и одной из диагоналей.

271. Через вершину B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, которая не имеет с параллелограммом других общих точек. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и b соответственно. Найдите расстояние от точки D до этой прямой.

Готовимся к изучению новой темы

272. В окружности проведены диаметры AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AC \parallel BD$.

273. В окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC. Докажите, что $\angle BOC = 2\angle BAC$.

274. Прямая AB касается окружности с центром O в точке C, $AC = BC$. Докажите, что $OA = OB$.

275. Хорда AB окружности с центром O перпендикулярна радиусу OC и делит его пополам. Найдите: 1) $\angle AOB$; 2) $\angle ACB$.

276. Сколько общих точек имеют две окружности с радиусами 6 см и 8 см, если расстояние между их центрами равно: 1) 15 см; 2) 14 см; 3) 10 см; 4) 2 см?

Повторите содержание пунктов 19, 20, 21, 22 на с. 201–203.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

277. Многоугольник разбит диагоналями на треугольники, которые окрашены в чёрный и белый цвета так, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Докажите, что количество чёрных треугольников не больше утроенного количества белых треугольников.

§ 9. Центральные и вписанные углы

Определение

Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.

На рисунке 76 угол AOB – центральный. Стороны этого угла пересекают окружность в точках A и B. Эти точки делят окружность на две **дуги**, выделенные на рисунке 76 разным цветом. Точки A и B называют **концами** дуги, и они принадлежат каждой из выделенных дуг. Каждую из этих дуг можно обозначить так: $\smile AB$ (читают: «дуга AB»).

Однако по записи $\smile AB$ невозможно различить дуги на рисунке 76. Если на какой-нибудь из двух дуг отметить точку (на рисунке 77 это точка M), то понятно, что обозначение $\smile AMB$ относится к «синей» дуге. Если на одной из двух дуг AB отмечена точка, то договоримся, что обозначение $\smile AB$ относится к дуге, которой эта точка не принадлежит (на рисунке 77 это «красная» дуга).

Дуга AB принадлежит центральному углу AOB (рис. 77). В этом случае говорят, что центральный угол AOB **опирается на дугу** AB.

Каждая дуга окружности, как и вся окружность, имеет **градусную меру**. *Градусную меру всей окружности считают равной* 360°. Если центральный угол MON опирается на дугу MN (рис. 78), то градусную

Рис. 76

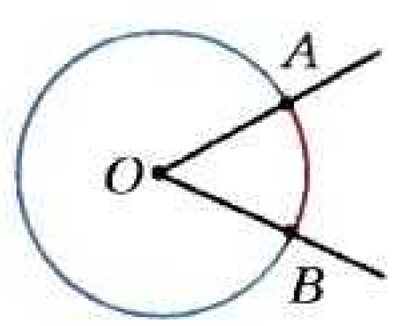


Рис. 77

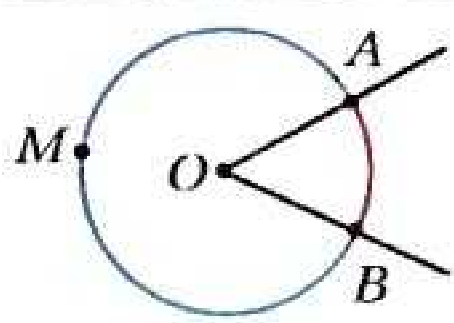
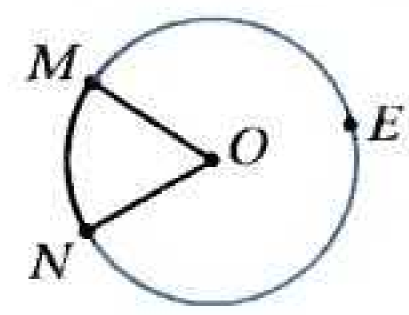


Рис. 78



меру дуги MN считают равной градусной мере угла MON и записывают $\smile MN = \angle MON$ (читают: «градусная мера дуги MN равна градусной мере угла MON»). Градусную меру дуги MEN (*см.* рис. 78) считают равной $360° - \angle MON$.

На рисунке 79 изображена окружность, в которой проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. Тогда $\smile AMD = 90°$, $\smile ACD = 360° - 90° = 270°$, $\smile ACB = \smile ADB = 180°$. Каждую из дуг ACB и ADB называют **полуокружностью**. На рисунке 79 полуокружностями являются также дуги CAD и CBD.

О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что хорда **стягивает** дугу. На рисунке 80 хорда AB стягивает каждую из дуг AB и AKB.

Любая хорда стягивает две дуги, сумма градусных мер которых равна 360°.

Определение

Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

На рисунке 81 угол ABC – вписанный. Дуга AC принадлежит этому углу, а дуга ABC – не принадлежит. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC **опирается на дугу** AC. Также можно сказать, что вписанный угол ABC **опирается на хорду** AC.

Рис. 79

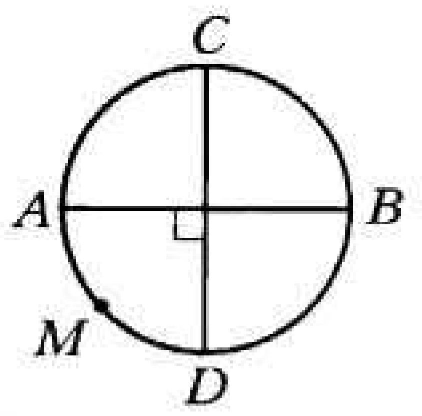


Рис. 80

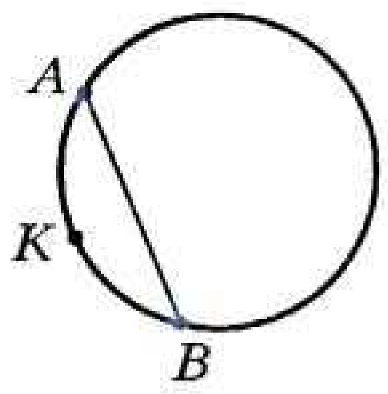
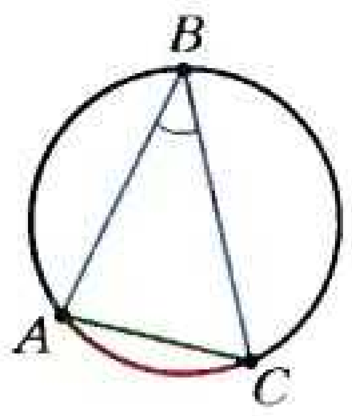


Рис. 81



Теорема 9.1

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Доказательство

На рисунке 81 угол ABC – вписанный. Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.

Рассмотрим три случая расположения центра O окружности относительно вписанного угла ABC.

1) Центр O принадлежит одной из сторон угла, например BC (рис. 82).

Проведём радиус OA. Центральный угол AOC – внешний угол равнобедренного треугольника ABO (стороны OA и OB равны как радиусы). Тогда $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Однако $\angle A = \angle B$. Отсюда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$.

2) Центр O принадлежит углу, однако не принадлежит ни одной из его сторон (рис. 83).

Проведём диаметр BK. Согласно доказанному $\angle ABK = \frac{1}{2}\cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2}\cup KC$. Имеем: $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2}\cup AK + \frac{1}{2}\cup KC = \frac{1}{2}\cup AKC$.

3) Центр O не принадлежит углу (рис. 84).

Для третьего случая проведите доказательство самостоятельно. ◄

Рис. 82

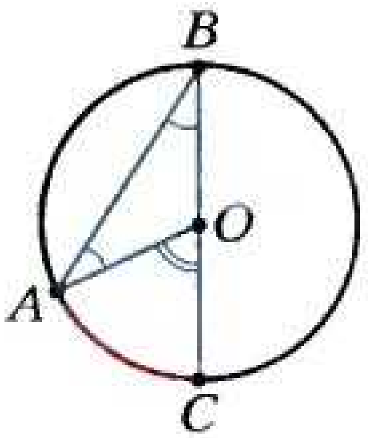


Рис. 83

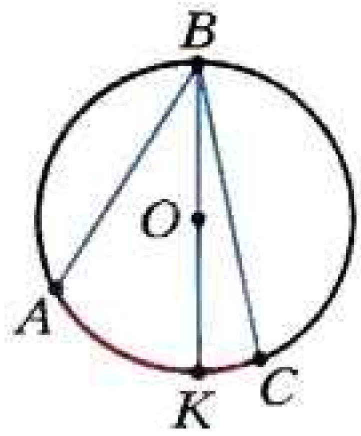
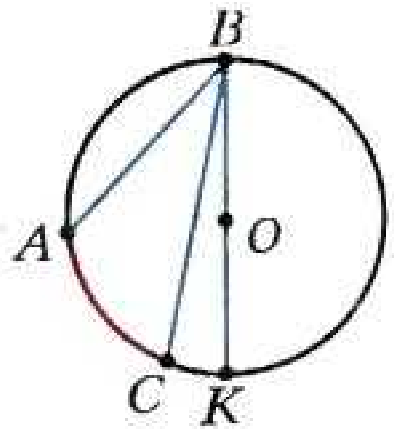


Рис. 84



Следствие 1

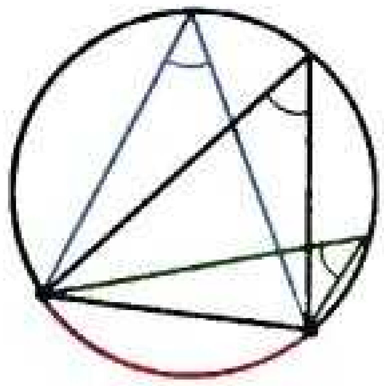
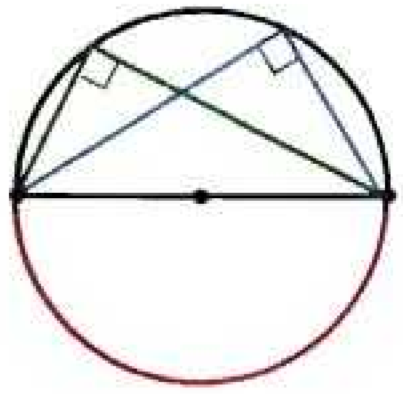
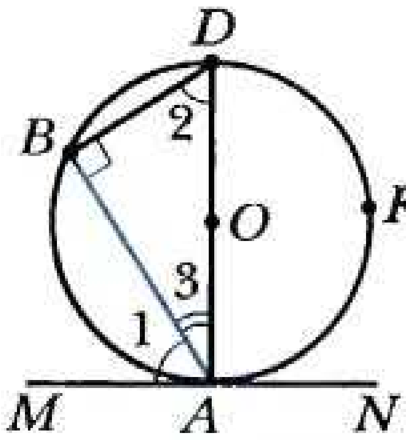
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 85).

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой (рис. 86).

Доказите эти свойства самостоятельно.

Задача 1 (свойство угла между касательной и хордой). Отрезок AB – хорда окружности с центром O (рис. 87). Через точку A проведена касательная MN. Докажите, что $\angle MAB = \frac{1}{2}\cup AB$ и $\angle NAB = \frac{1}{2}\cup AKB$.

Рис. 85	Рис. 86	Рис. 87
		

Решение. Проведём диаметр AD (*см.* рис. 87).

Тогда угол B равен 90° как вписанный, опирающийся на диаметр AD. В прямоугольнике треугольнике ABD $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$. Так как MN – касательная, то $\angle DAM = 90^\circ$. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$. Получаем, что $\angle 1 = \angle 2$.

Следовательно, $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2}\cup AB$.

Имеем: $\angle NAB = 180^\circ - \angle MAB = 180^\circ - \frac{1}{2}\cup AB = 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - \cup AKB) = 180^\circ - 180^\circ + \frac{1}{2}\cup AKB = \frac{1}{2}\cup AKB$. ◄

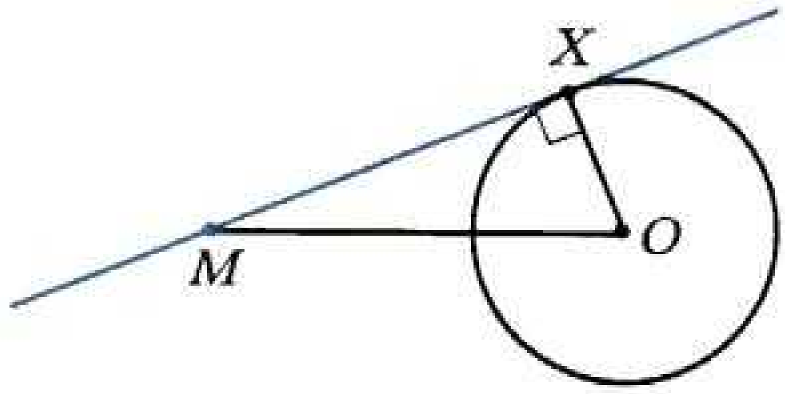
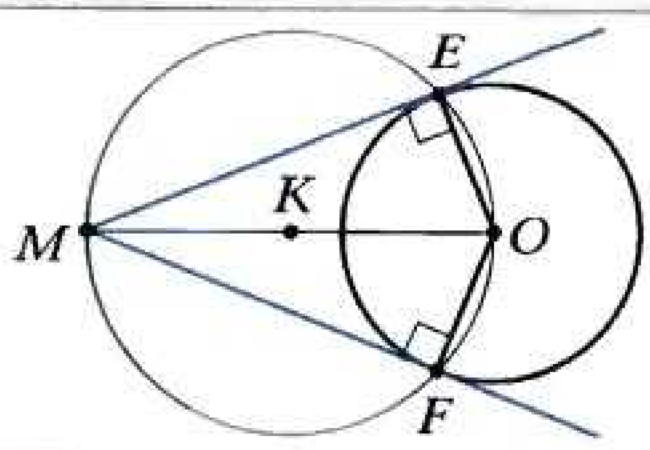
Задача 2. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку, лежащую вне окружности.

Решение. На рисунке 88 изображены окружность с центром в точке O и точка M, лежащая вне этой окружности.

Пусть X такая точка окружности, что прямая MX является касательной. Тогда угол MXO – прямой. Его можно рассматривать как вписанный в окружность с диаметром MO.

Проведённый анализ показывает, как провести построение.

Построим отрезок MO и разделим его пополам (рис. 89). Пусть точка K – его середина. Построим окружность с центром в точке K радиуса KO. Отметим точки E и F – точки пересечения построенной и данной окружностей. Тогда каждая из прямых ME и MF является искомой касательной.

Рис. 88	Рис. 89
	

Действительно, угол MEO равен $90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр MO. Отрезок OE – радиус данной окружности. Тогда по признаку касательной прямая ME – искомая касательная. ◂

1. Какой угол называют центральным углом окружности?
2. Как называют части окружности, на которые делят её две точки?
3. Каким символом обозначают дугу окружности?
4. В каком случае говорят, что центральный угол опирается на дугу?
5. Чему считают равной градусную меру окружности?
6. Как связаны градусные меры центрального угла окружности и дуги, на которую этот угол опирается?
7. Сколько дуг стягивает каждая хорда? Чему равна сумма их градусных мер?
8. Какой угол называют вписанным углом окружности?
9. В каком случае говорят, что вписанный угол опирается на дугу?
10. Чему равна градусная мера вписанного угла?
11. Каким свойством обладают вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
12. Какой вид имеет вписанный угол, опирающийся на диаметр?

Упражнения

278. Чему равна градусная мера центрального угла окружности, опирающегося на дугу, которая составляет: 1) $\frac{1}{6}$ окружности; 2) $\frac{1}{10}$ окружности; 3) $\frac{1}{2}$ окружности; 4) $\frac{2}{9}$ окружности?

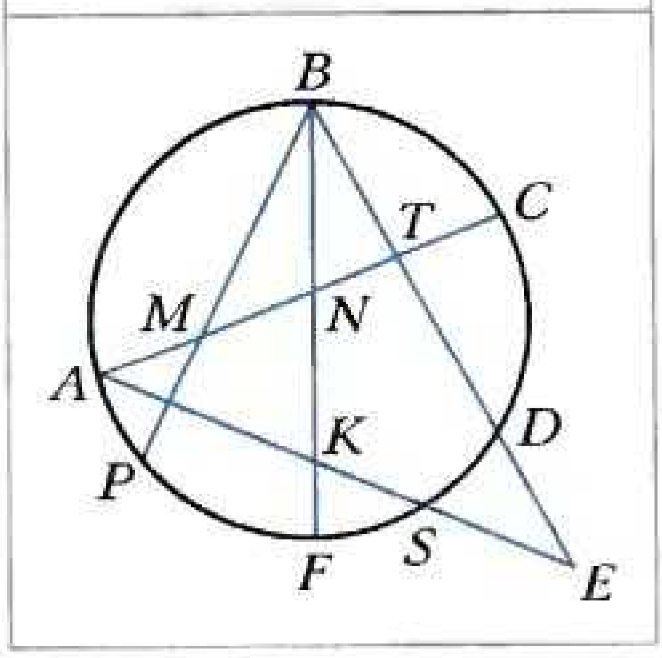
279. Найдите градусные меры двух дуг окружности, на которые её делят две точки, если градусная мера одной из дуг на $80°$ больше градусной меры другой.

280. Найдите градусные меры двух дуг окружности, на которые её делят две точки, если градусные меры этих дуг относятся как $7 : 11$.

281. Найдите градусную меру дуги, которую описывает конец часовой стрелки: 1) за 2 ч; 2) за 5 ч; 3) за 8 ч; 4) за 30 мин; 5) за 12 ч.

282. Какие из углов, изображённых на рисунке 90, являются вписанными? На какую дугу опирается каждый из вписанных углов?

Рис. 90



283. На рисунке 91 изображена окружность с центром в точке O. Найдите:
1) $\angle BDC$, если $\angle BAC = 40°$;
2) $\angle BEC$, если $\angle BOC = 70°$;
3) $\cup CE$, если $\angle CDE = 80°$;
4) $\angle DBA$, если $\cup DBA = 300°$.

284. Найдите ошибки на рисунке 92.

285. Найдите вписанный угол, если градусная мера дуги, на которую он опирается, равна: 1) 84°; 2) 110°; 3) 230°; 4) 340°.

Рис. 91

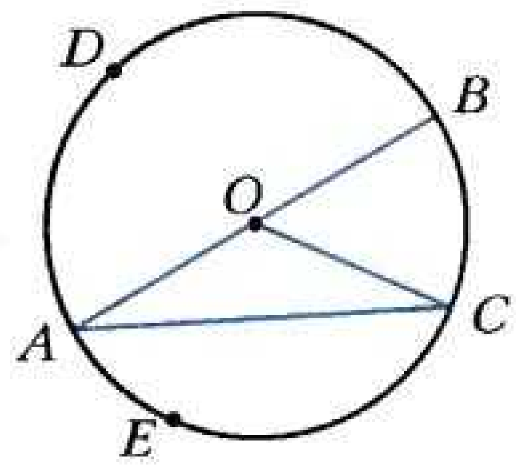
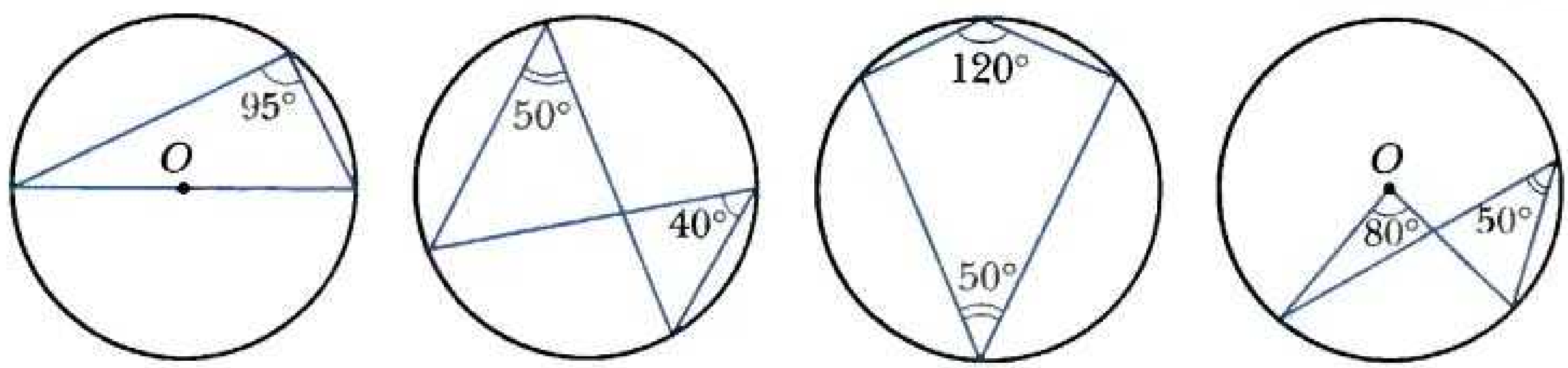


Рис. 92



Точка O — центр окружности

а

б

в

Точка O — центр окружности

г

286. На рисунке 93 $\cup AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Найдите $\cup BC$.

287. На рисунке 93 $\cup AB = 64°$, $\cup BC = 92°$. Найдите $\angle ABC$.

288. Центральный угол AOC на 25° больше вписанного угла ABC, который опирается на дугу AC (рис. 94). Найдите $\angle AOC$ и $\angle ABC$.

289. Концы хорды AB делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 7. Под какими углами видна эта хорда из точек M и K (рис. 95)?

290. Хорды AB и CD равны (рис. 96). Докажите, что $\cup AMB = \cup CND$.

Рис. 93

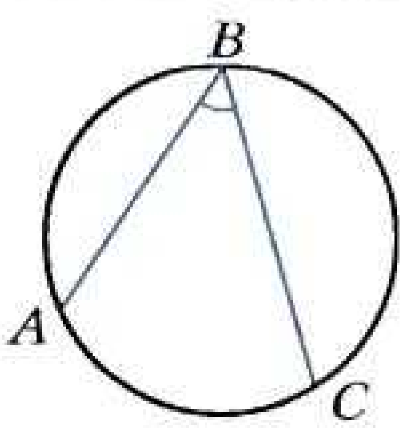


Рис. 94

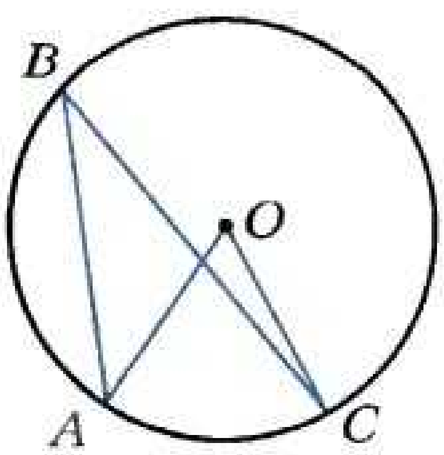


Рис. 95

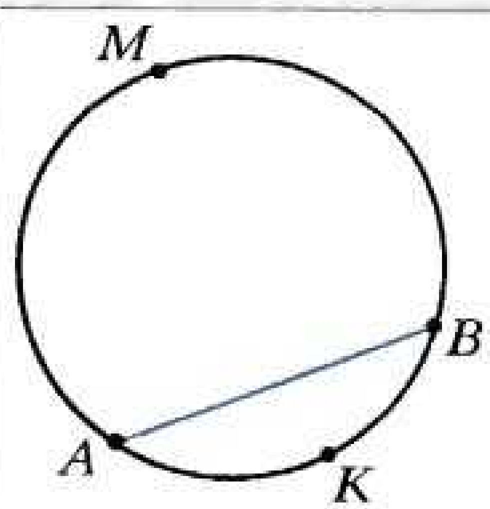
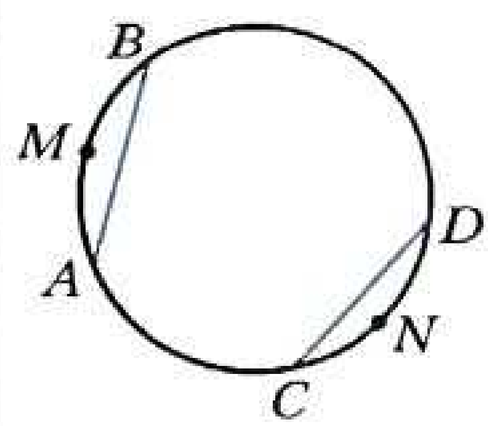


Рис. 96



291. Докажите, что если две дуги окружности равны, то равны и хорды, их стягивающие.

292. Точки A, B и C делят окружность на три дуги так, что $\smile AB : \smile BC : \smile AC = 1 : 2 : 3$. Найдите углы треугольника ABC.

293. Вершины равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делят описанную около него окружность на три дуги, причём $\smile AB = 70^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

294. Концы диаметров AC и BD окружности последовательно соединены так, что образовался четырёхугольник $ABCD$.
1) Определите вид четырёхугольника $ABCD$.
2) Найдите $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile CD$ и $\smile AD$, если $\angle ABD = 80^\circ$.

295. Острый угол прямоугольного треугольника равен 32°. Найдите градусные меры дуг, на которые вершины треугольника делят окружность, описанную около него, и радиус этой окружности, если гипотенуза данного треугольника равна 12 см.

296. Докажите, что если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр.

297. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 97). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile BD)$.

298. Хорды AB и CD окружности не пересекаются, а прямые AB и CD пересекаются в точке M (рис. 98). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile BD)$.

299. Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а вторая проходит через её центр (рис. 99). Известно, что $\smile BMC = 100^\circ$. Найдите $\angle BAC$.

Рис. 97

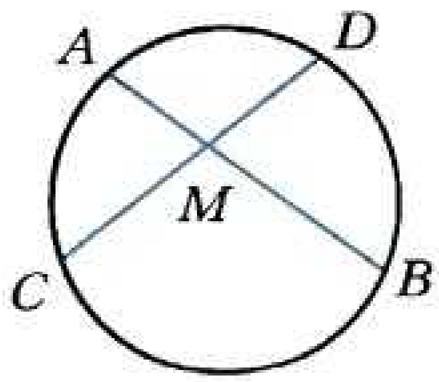


Рис. 98

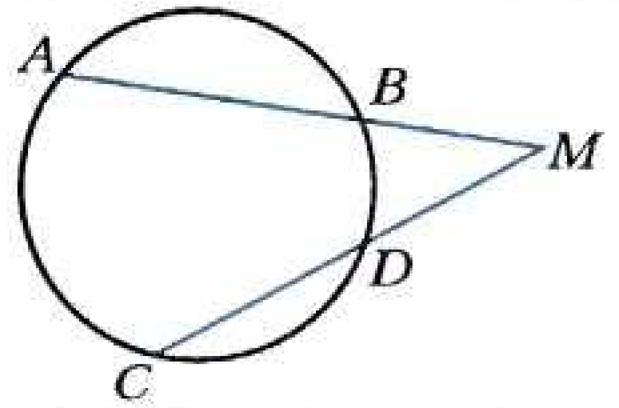
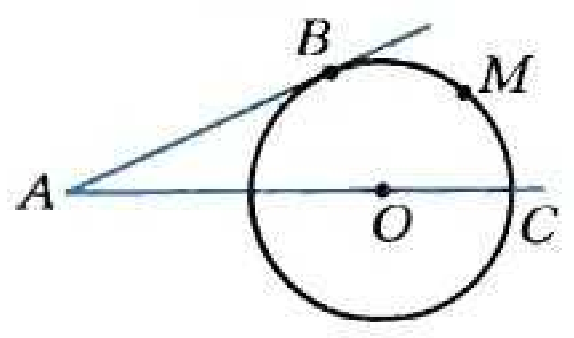


Рис. 99



300. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке D. Найдите углы треугольника ADC, если $\angle ABC = 80^\circ$.

301. На дуге AC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, отмечена точка M так, что $\smile AM = 2\smile CM$. Найдите углы треугольника AMC.

302. Окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезки AK и BM – высоты треугольника ABC.

303. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB в точке K так, что $\angle ACK = \angle BCK$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

304. Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключённых между двумя параллельными хордами, равны.

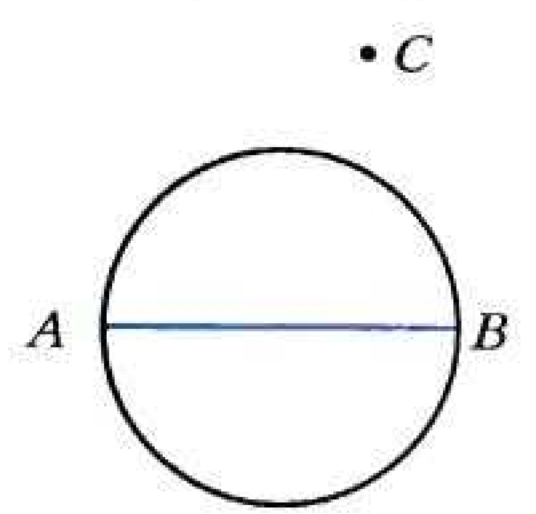
305. Вершины квадрата $ABCD$ лежат на окружности. На дуге AB отмечена произвольная точка M. Докажите, что $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

306. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 56°. На боковой стороне треугольника как на диаметре построена полуокружность, которую другие стороны треугольника делят на три дуги. Найдите градусные меры образовавшихся дуг.

307. Как, пользуясь только угольником, найти центр данной окружности?

308. Дана окружность, в которой проведён диаметр AB, и отмечена точка C вне окружности (рис. 100). Как, пользуясь только линейкой, провести через точку C прямую, перпендикулярную прямой AB?

Рис. 100



309. Две окружности имеют единственную общую точку M. Через точку M проведены две прямые, пересекающие данные окружности. Точки их пересечения с окружностями, отличные от точки M, соединены хордами. Докажите, что эти хорды параллельны.

310. К окружности, описанной около треугольника ABC, проведена в точке B касательная, пересекающая прямую AC в точке D. Отрезок BM – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD = MD$.

311. Даны отрезок AB и угол α. Найдите геометрическое место точек X таких, что $\angle AXB = \alpha$.

312. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведённой к данной стороне.

313. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и медиане, проведённой к данной стороне.

314. Постройте параллелограмм по двум сторонам и углу между диагоналями.

315. Постройте параллелограмм по углу и двум диагоналям.

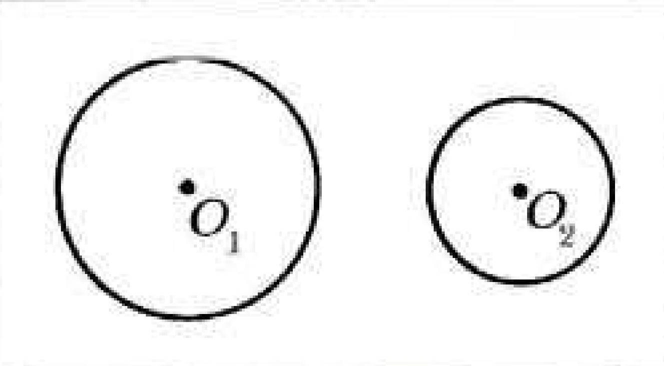
316. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек X таких, что треугольник AXB – прямоугольный.

317. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Точка O – центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $DO = DB = DC$.

318. Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1B_1 \perp CC_1$.

319. На рисунке 101 изображены две окружности с центрами O_1 и O_2. Постройте прямую l, которая касается этих окружностей так, что точки касания лежат в одной полуплоскости относительно прямой O_1O_2 (такую прямую l называют **внешней общей касательной** двух данных окружностей).

Рис. 101



320. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и радиусу вписанной окружности.

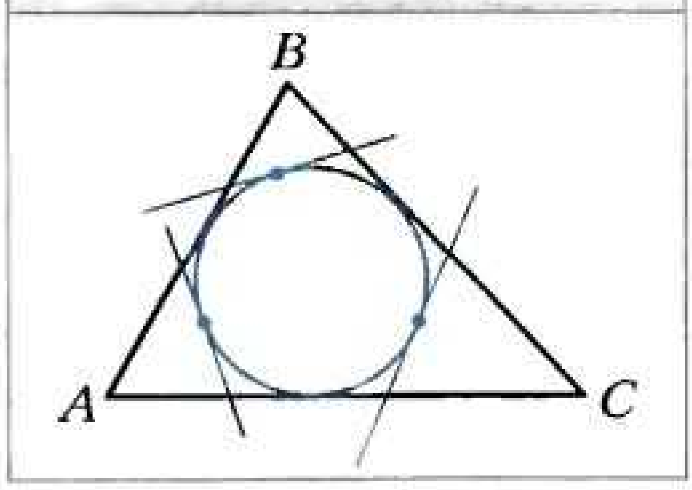
321. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и медиане, проведённой к другой стороне.

Готовимся к изучению новой темы

322. Периметр треугольника ABC равен 30 см. Точка касания вписанной окружности со стороной AB делит её в отношении 3 : 2, считая от вершины A, а точка касания со стороной BC удалена от вершины C на 5 см. Найдите стороны треугольника.

323. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные (рис. 102). Периметры треугольников, которые эти касательные отсекают от данного треугольника, равны P_1, P_2 и P_3. Найдите периметр треугольника ABC.

Рис. 102



324. Установите вид треугольника, у которого центр описанной окружности принадлежит медиане.

Повторите содержание пункта 22 на с. 203.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

325. Клетки квадрата размером 100×100 клеток раскрашены в шахматном порядке. Квадрат разрезали на квадраты, стороны которых содержат нечётное количество клеток, и в каждом таком квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и чёрных клеток отмечено поровну.

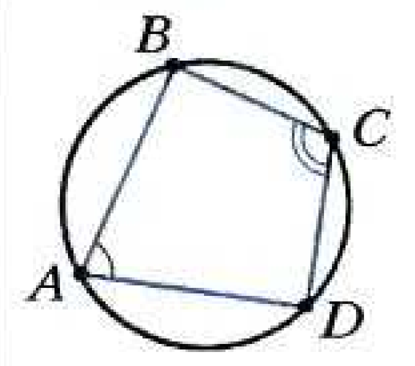
§ 10. Описанная и вписанная окружности четырёхугольника

Определение

Окружность называют описанной около четырёхугольника, если она проходит через все его вершины.

На рисунке 103 изображена окружность, описанная около четырёхугольника $ABCD$. В этом случае также говорят, что четырёхугольник **вписан** в окружность.

Рис. 103



Теорема 10.1

Если четырёхугольник является вписанным в окружность, то сумма его противолежащих углов равна 180°.

Доказательство

Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 103). Докажем, что $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$.

Так как углы A и C являются вписанными в окружность, то $\angle A = \frac{1}{2}\smile BCD$ и $\angle C = \frac{1}{2}\smile DAB$. Имеем: $\smile BCD + \smile DAB = 360°$. Тогда $\angle A + \angle C = 180°$.

Аналогично можно показать, что $\angle B + \angle D = 180°$. ◄

Вы знаете, что около любого треугольника можно описать окружность. Однако не всякий четырёхугольник обладает таким свойством. Например, нельзя описать окружность около параллелограмма, отличного от прямоугольника. Распознать четырёхугольники, около которых можно описать окружность, помогает следующая теорема.

Теорема 10.2
(обратная теореме 10.1)

Если в четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

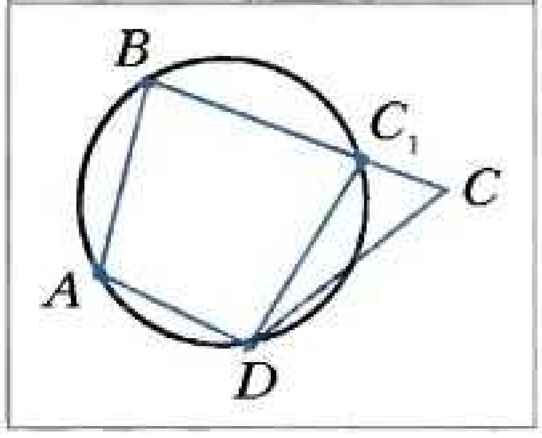
Доказательство

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle C = 180°$. Докажем, что около него можно описать окружность.

Предположим, что около этого четырёхугольника нельзя описать окружность. Опишем окружность около треугольника ABD. По предположению точка C не принадлежит этой окружности. Тогда возможны два случая.

1) Точка C лежит вне описанной окружности треугольника ABD (рис. 104).

Рис. 104

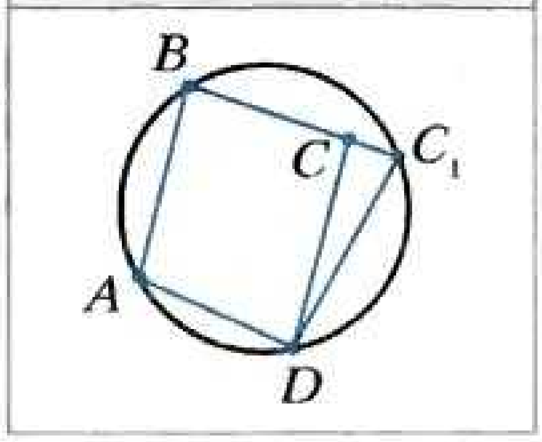


Пусть сторона BC пересекает окружность в точке C_1 (*см.* рис. 104). Четырёхугольник ABC_1D – вписанный в окружность. Тогда по теореме 10.1 получаем, что $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Но по условию $\angle A + \angle C = 180°$. Отсюда $\angle BC_1D = \angle C$. Однако это равенство выполняться не может, так как по свойству внешнего угла треугольника $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$.

Итак, точка C не может лежать вне окружности, описанной около треугольника ABD.

2) Точка C лежит внутри описанной окружности треугольника ABD (рис. 105). Рассуждая аналогично, можно показать, что точка C не может лежать внутри рассматриваемой окружности. Убедитесь в этом самостоятельно.

Рис. 105



Таким образом, предположив, что точка C не принадлежит окружности, описанной около треугольника ABD, мы получили противоречие. ◄

Теорему 10.2 можно рассматривать как признак принадлежности четырёх точек одной окружности.

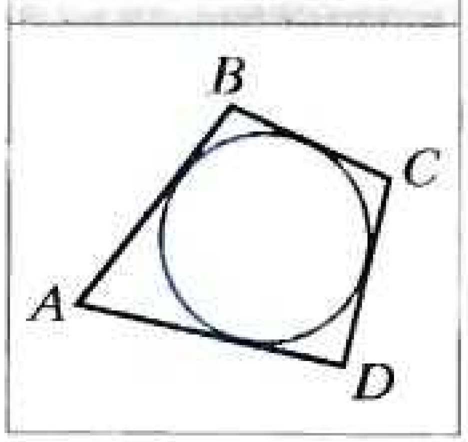
Если четырёхугольник вписан в окружность, то существует точка, равноудалённая от всех его вершин (центр описанной окружности). Чтобы отметить эту точку, достаточно найти точку пересечения серединных перпендикуляров двух соседних сторон четырёхугольника.

Определение

Окружность называют вписанной в четырёхугольник, если она касается всех его сторон.

На рисунке 106 изображена окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$. В этом случае также говорят, что четырёхугольник **описан** около окружности.

Рис. 106



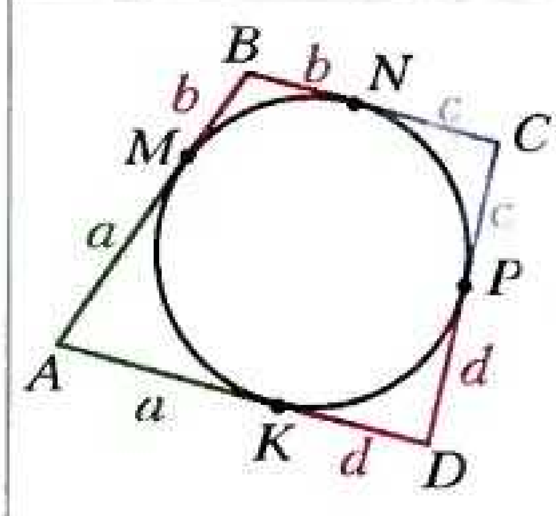
Теорема 10.3

Если четырёхугольник является описанным около окружности, то суммы его противолежащих сторон равны.

Доказательство

Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 107). Докажем, что $AB + CD = BC + AD$.

Рис. 107



Точки M, N, P, K – точки касания окружности со сторонами четырёхугольника.

Так как отрезки касательных, проведённых к окружности через одну точку, равны, то $AK = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$. Пусть $AK = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DP = d$.

Тогда $AB + CD = a + b + c + d$,

$BC + AD = b + c + a + d$.

Следовательно, $AB + CD = BC + AD$. ◄

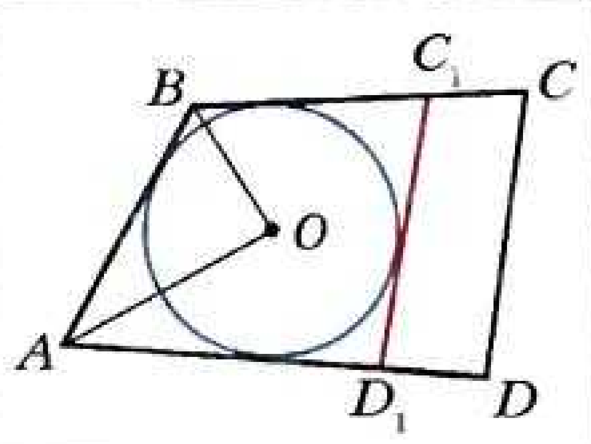
Вы знаете, что в любой треугольник можно вписать окружность. Однако не всякий четырёхугольник обладает таким свойством. Например, нельзя вписать окружность в прямоугольник, отличный от квадрата. Распознать четырёхугольники, в которые можно вписать окружность, помогает следующая теорема.

Теорема 10.4

Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Доказательство

Рис. 108



Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в него можно вписать окружность.

Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O (рис. 108). Тогда точка O равноудалена от сторон AB, BC и AD. Следовательно, существует окружность с центром в точке O, которая касается трёх этих сторон.

Предположим, что эта окружность не касается стороны CD. Тогда возможны два случая.

1) Сторона CD не имеет общих точек с построенной окружностью.

Проведём касательную C_1D_1 параллельно стороне CD (*см.* рис. 108). Четырёхугольник ABC_1D_1 описан около окружности. Тогда по теореме 10.3 получаем, что $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$. (1)

Однако по условию $AB + CD = BC + AD$. (2)

Вычтем из равенства (2) равенство (1):

$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1$.

Отсюда $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$; $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$.

Это равенство противоречит утверждению, доказанному в ключевой задаче § 1.

Итак, сторона CD должна иметь общие точки с рассматриваемой окружностью.

2) Сторона CD имеет две общие точки с построенной окружностью.

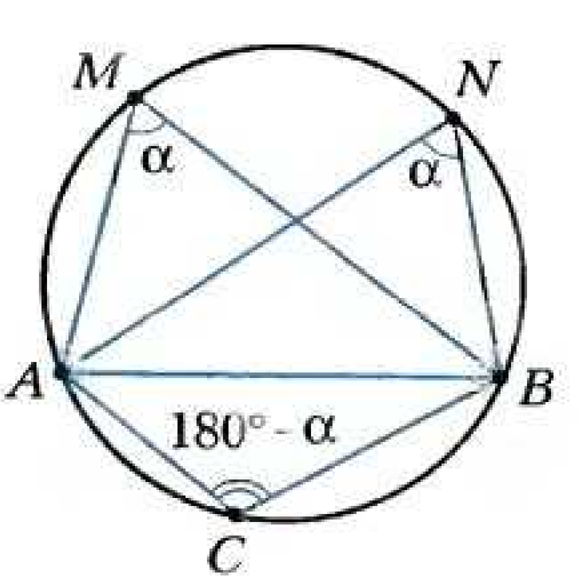
Рассуждая аналогично, можно показать, что сторона CD не может иметь две общие точки с рассматриваемой окружностью. Убедитесь в этом самостоятельно.

Таким образом, предположив, что построенная окружность не касается стороны CD, мы получили противоречие. ◄

Если четырёхугольник описан около окружности, то существует точка, равноудалённая от всех его сторон (центр вписанной окружности). Чтобы отметить эту точку, достаточно найти точку пересечения биссектрис двух соседних углов выпуклого четырёхугольника.

Задача (признак принадлежности четырёх точек одной окружности). Точки A, M, N, B таковы, что $\angle AMB = \angle ANB$, причём точки M и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Докажите, что точки A, M, N, B лежат на одной окружности.

Рис. 109



Решение. Пусть $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Около треугольника AMB опишем окружность (рис. 109). Пусть C – произвольная точка окружности, не принадлежащая дуге AMB. Тогда четырёхугольник $ACBM$ – вписанный в окружность. Отсюда $\angle C = 180° - \alpha$. Имеем: $\angle C + \angle N = 180°$. Тогда по теореме 10.2 вокруг четырёхугольника $ACBN$ можно описать окружность. Так как около треугольника ABC

можно описать только одну окружность, то этой окружности принадлежат как точка M, так и точка N.

1. Какую окружность называют описанной около четырёхугольника?
2. В каком случае говорят, что четырёхугольник вписан в окружность?
3. Каким свойством обладают углы вписанного в окружность четырёхугольника?
4. При каком условии около четырёхугольника можно описать окружность?
5. Какую окружность называют вписанной в четырёхугольник?
6. В каком случае говорят, что четырёхугольник описан около окружности?
7. Каким свойством обладают стороны описанного около окружности четырёхугольника?
8. При каком условии в четырёхугольник можно вписать окружность?

Практические задания

326. Начертите прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см. Опишите около него окружность.

327. Начертите произвольную равнобокую трапецию. Опишите около неё окружность.

328. Начертите равнобокую трапецию с бóльшим основанием 6 см, боковой стороной 4 см и углом 60°. Впишите в неё окружность.

329. Начертите произвольный квадрат. Впишите в него окружность и опишите около него окружность.

Упражнения

330. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если его углы A, B, C и D соответственно равны:
1) 90°, 90°, 80°, 100°; 2) 90°, 80°, 90°, 100°; 3) 50°, 70°, 130°, 110°?

331. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если его углы A, B, C и D соответственно пропорциональны числам:
1) 3, 8, 11, 6; 2) 4, 5, 4, 2?

332. Докажите, что можно описать окружность около:
1) любого прямоугольника;
2) любой равнобокой трапеции.

333. Какая точка является центром окружности, описанной около прямоугольника?

334. Можно ли описать окружность около ромба, не являющегося квадратом?

335. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около данного прямоугольника.

336. Можно ли вписать окружность в четырёхугольник $ABCD$, если его стороны AB, BC, CD, AD соответственно пропорциональны числам: 1) 7, 8, 12, 11; 2) 7, 12, 8, 11?

337. Сумма двух противолежащих сторон описанного около окружности четырёхугольника равна 18 см. Найдите периметр данного четырёхугольника.

338. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 7 см. Чему равен периметр данной трапеции, если в неё можно вписать окружность?

339. В четырёхугольнике $CDEF$, в который можно вписать окружность, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Найдите сторону CF.

340. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Какая точка является центром окружности, вписанной в ромб?

341. Можно ли вписать окружность в параллелограмм, который не является ромбом?

342. Под каким углом видна боковая сторона трапеции из центра вписанной окружности?

343. Один из углов ромба равен 60°, а бóльшая диагональ равна 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данный ромб.

344. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник является квадратом.

345. Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб является квадратом.

346. Сторона AD четырёхугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около него, $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Найдите углы BAD, ADC, CAD, BDA.

347. Найдите углы четырёхугольника $MNKP$, вписанного в окружность, если $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

348. Равнобокая трапеция вписана в окружность, центр которой принадлежит одному из оснований. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий её боковой стороне, равен 56°. Найдите углы трапеции.

349. Высоты BM и CK остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что точки A, K, H и M лежат на одной окружности.

350. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бóльшую боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см. Найдите периметр данной трапеции, если радиус вписанной окружности равен 20 см.

351. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бо́льшую боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найдите радиус вписанной окружности, если периметр трапеции равен 54 см.

352. Центр окружности, описанной около трапеции, принадлежит большему основанию, а боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.

353. Диагональ трапеции, вписанной в окружность, равна d. Боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом $120°$. Найдите среднюю линию трапеции.

354. Боковые стороны и меньшее основание равнобокой трапеции равны 6 см, а один из её углов равен $60°$. Найдите радиус окружности, описанной около данной трапеции.

355. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.

356. Из произвольной точки O, которая принадлежит острому углу A, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры OB и OC на его стороны. Докажите, что $\angle OAB = \angle OCB$.

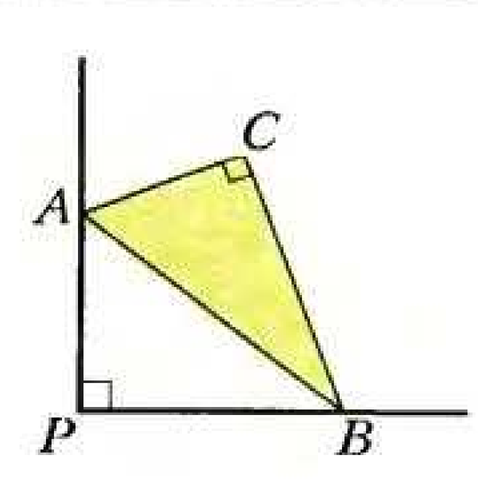
357. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle A = 60°$. Найдите $\angle CMK$.

358. Биссектрисы MA и KB треугольника MNK пересекаются в точке O, точки A, N, B и O лежат на одной окружности. Найдите $\angle N$.

359. Вне прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузе AB построен квадрат $ABFD$. Докажите, что $\angle ACO = \angle OCB$, где O – точка пересечения диагоналей квадрата.

360. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P (рис. 110). Докажите, что точка C при этом перемещается по отрезку.

Рис. 110



361. Из произвольной точки M, принадлежащей углу с вершиной A, но не принадлежащей его сторонам, проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам угла. Из точки A проведён перпендикуляр AK к отрезку PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

362. В остроугольном треугольнике ABC отрезки CC_1 и AA_1 – высоты. Докажите, что серединный перпендикуляр отрезка C_1A_1 проходит через середину стороны AC.

363. На боковых сторонах трапеции, в которую можно вписать окружность, как на диаметрах построены две окружности. Докажите, что эти окружности имеют одну общую точку.

Упражнения для повторения

364. Через середину диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD. Эта прямая пересекает прямые AB и CD в точках M и K соответственно. Определите вид четырёхугольника $AMCK$.

365. В треугольнике ABC отрезок AD – биссектриса. Через точку D проведена прямая, которая параллельна стороне AC и пересекает сторону AB в точке E. Через точку E проведена прямая, которая параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $AE = CF$.

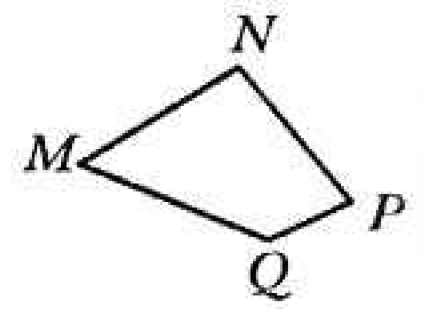
366. Высота BM ромба $ABCD$, опущенная из вершины тупого угла на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке K, $\angle BKC = 64°$. Найдите $\angle ABC$.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

367. Можно ли квадрат разрезать на тысячеугольник и 199 пятиугольников?

Задание № 1 в тестовой форме «Проверьте себя»

Рис. 111



1. Каким из представленных способов можно обозначить четырёхугольник, изображённый на рисунке 111?

А) $MPQN$ В) $NPMQ$

Б) $QMNP$ Г) $QNPM$

2. Какие углы могут быть в четырёхугольнике?

А) четыре тупых угла

Б) четыре острых угла

В) два тупых и два прямых угла

Г) два прямых угла, один острый угол и один тупой угол

3. В четырёхугольнике каждая сторона равна одной и той же его диагонали. Чему равны углы четырёхугольника?

А) $60°$, $60°$, $120°$, $120°$ В) $90°$, $90°$, $90°$, $90°$

Б) $60°$, $120°$, $90°$, $90°$ Г) $150°$, $30°$, $150°$, $30°$

4. Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону пополам. Чему равны стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см?

А) 5 см, 10 см В) 7 см, 8 см

Б) 6 см, 4 см Г) 3 см, 12 см

5. Четырёхугольник является параллелограммом, если

А) у него имеются две пары равных сторон

Б) у него имеются две пары равных углов

В) каждая диагональ делит его на два равных треугольника

Г) у него три стороны равны

6. Какое из данных утверждений неверно?

А) четырёхугольник, который одновременно является и ромбом, и прямоугольником, – квадрат

Б) параллелограмм, у которого диагонали равны и перпендикулярны, – квадрат

В) параллелограмм, у которого все углы прямые, а диагонали равны, – квадрат

Г) ромб, у которого диагонали равны, – квадрат

7. В треугольнике ABC точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и BC. Отрезок MN является средней линией, если

А) $MN \parallel AC$ В) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BAC$

Б) $MN = \frac{1}{2}AC$ Г) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BCA$

8. Какое из приведённых свойств не может иметь трапеция?
А) противолежащие углы равны
Б) диагонали равны и перпендикулярны
В) один из углов при большем основании больше одного из углов при меньшем основании
Г) средняя линия трапеции равна её высоте

9. Вписанные углы одной окружности равны, если они
А) опираются на одну хорду
Б) имеют общую вершину
В) опираются на одну дугу
Г) имеют общую сторону

10. Около четырёхугольника $CDEF$ описана окружность, $\angle CDF = 80^\circ$, $\angle DEC = 30^\circ$. Чему равен угол DCF?
А) 50° Б) 110° В) 70° Г) 90°

Итоги главы 1

Сумма углов четырёхугольника

Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

Параллелограмм

Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

Свойства параллелограмма

- **Противолежащие стороны параллелограмма равны.**
- **Противолежащие углы параллелограмма равны.**
- **Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**

Высота параллелограмма

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Признаки параллелограмма

- Если в четырёхугольнике каждые две противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Прямоугольник

Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

Особое свойство прямоугольника

Диагонали прямоугольника равны.

Признаки прямоугольника

- Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.
- Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Ромб

Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

Особое свойство ромба

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Признаки ромба

- Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
- Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

Квадрат

Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны.

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Трапеция

Трапецией называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Высота трапеции

Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Свойство средней линии трапеции

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Центральный угол окружности

Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.

Вписанный угол окружности

Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Градусная мера вписанного угла окружности

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Свойства вписанных углов

- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой.

Окружность, описанная около четырёхугольника

Окружность называют описанной около четырёхугольника, если она проходит через все его вершины.

Свойство вписанного в окружность четырёхугольника

Если четырёхугольник является вписанным в окружность, то сумма его противолежащих углов равна 180°.

Признак четырёхугольника, около которого можно описать окружность

Если в четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

Окружность, вписанная в четырёхугольник

Окружность называют вписанной в четырёхугольник, если она касается всех его сторон.

Свойство описанного около окружности четырёхугольника

Если четырёхугольник является описанным около окружности, то суммы его противолежащих сторон равны.

Признак четырёхугольника, в который можно вписать окружность

Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Глава 2. Подобие треугольников

Изучив материал этой главы, вы узнаете о свойствах отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла.

Вы научитесь находить среди треугольников те, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры.

Вы познакомитесь со свойством пересекающихся хорд и свойством касательной и секущей, проведённых к окружности через одну точку.

Вы узнаете, какие треугольники называют подобными, и научитесь применять их свойства.

§ 11. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

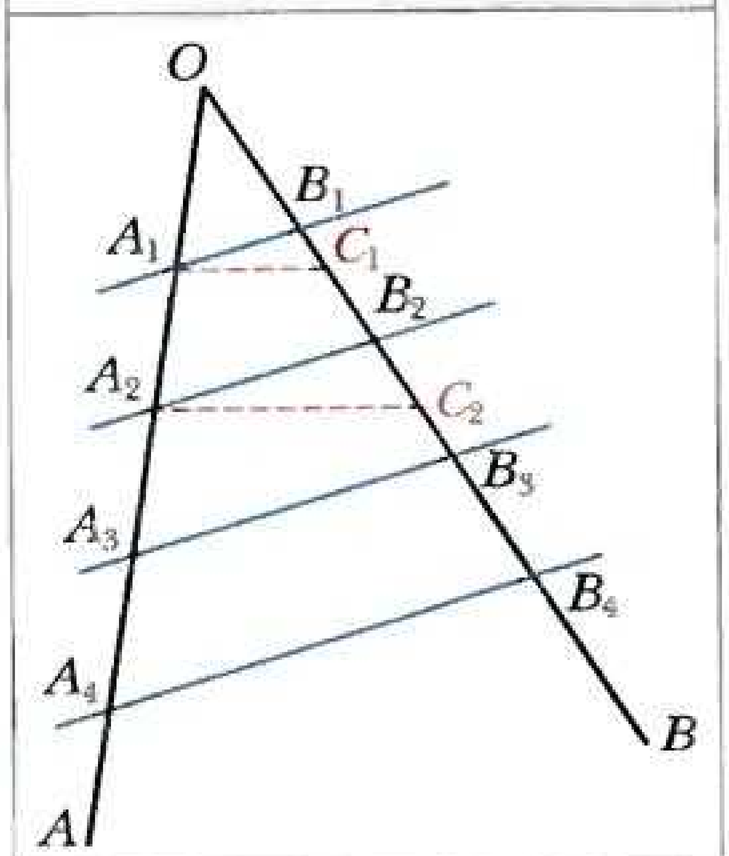
Теорема 11.1
(теорема Фалеса)

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство

Пусть дан угол AOB (рис. 112). Известно, что $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, ... Докажем, что $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$.

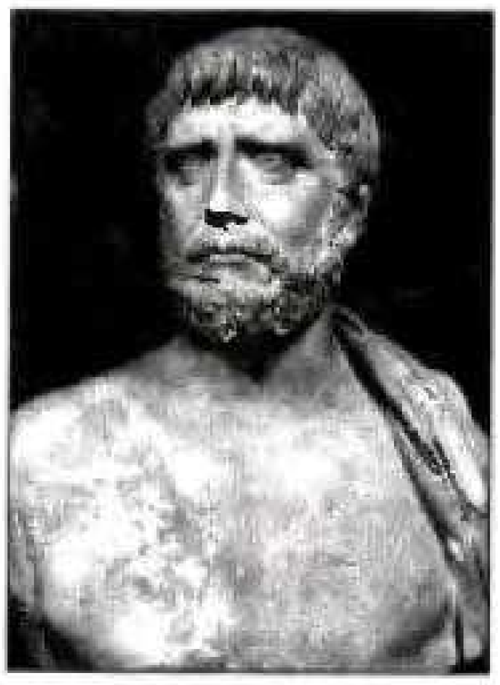
Рис. 112



Предположим, что $OB_1 \neq B_1B_2$. Пусть серединой отрезка OB_2 является некоторая точка C_1. Тогда отрезок A_1C_1 – средняя линия треугольника A_2OB_2. Отсюда $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Значит, через точку A_1 проходят две прямые, параллельные прямой A_2B_2, что противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, $OB_1 = B_1B_2$.

Предположим, что $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Пусть серединой отрезка B_1B_3 является некоторая точка C_2. Тогда отрезок A_2C_2 – средняя линия трапеции $A_3A_1B_1B_3$. Отсюда $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Значит, через точку A_2 проходят две прямые, параллельные прямой A_3B_3. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Аналогично доказывают, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д. ◄



Фалéс Милетский (ок. 625 — ок. 547 до н. э.)

Древнегреческий философ, учёный, купец и государственный деятель. Родом из Милета — порта в Малой Азии на побережье Эгейского моря.

Определение

Отношением двух отрезков называют отношение их длин, выраженных в одних и тех же единицах измерения.

Если, например, $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то отношение отрезка AB к отрезку CD равно $\frac{8}{6}$. Записывают: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, т. е. $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, то говорят, что отрезки AB и CD **пропорциональны** соответственно отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

Аналогично можно говорить о пропорциональности большего числа отрезков. Например, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$, то говорят, что отрезки AB, CD, MN пропорциональны соответственно отрезкам A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1.

Теорема 11.2
(теорема о пропорциональных отрезках)

Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки школьного курса геометрии. Мы приведём доказательство для частного случая.

Пусть стороны угла MON пересечены параллельными прямыми AA_1 и BB_1 (рис. 113). Докажем, что:

1) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$; 3) $\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Докажем первое из этих равенств (остальные два доказываются аналогично).

Пусть для отрезков OA и AB существует такой отрезок длиной l, который укладывается целое число раз в каждом из них. Имеем: $OA = ml$, $AB = nl$, где m и n – некоторые натуральные числа.

Тогда отрезки OA и AB можно разделить соответственно на m и n равных отрезков, каждый из которых равен l.

Через концы полученных отрезков проведём прямые, параллельные прямой BB_1 (рис. 114). По теореме Фалеса эти прямые делят отрезки OA_1 и A_1B_1 соответственно на m и n равных отрезков. Пусть каждый из этих отрезков равен l_1. Тогда $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

Имеем: $\frac{OA}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{ml_1}{nl_1} = \frac{m}{n}$. Отсюда $\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}$. Тогда $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Почему же приведённые рассуждения нельзя считать полным доказательством теоремы? Дело в том, что не для любых двух отрезков существует отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз. В частности, для отрезков OA и AB такой отрезок может и не существовать. Доказательство для этого случая выходит за пределы рассматриваемого курса. ◄

Если рисунок 113 дополнить прямой CC_1, параллельной прямой BB_1 (рис. 115), то, рассуждая аналогично, получим, например, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Рис. 113

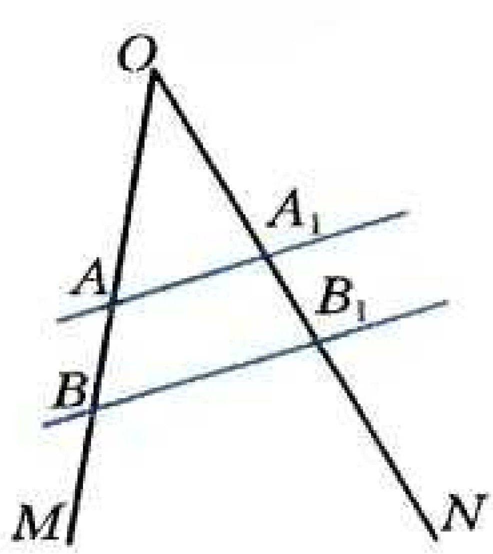


Рис. 114

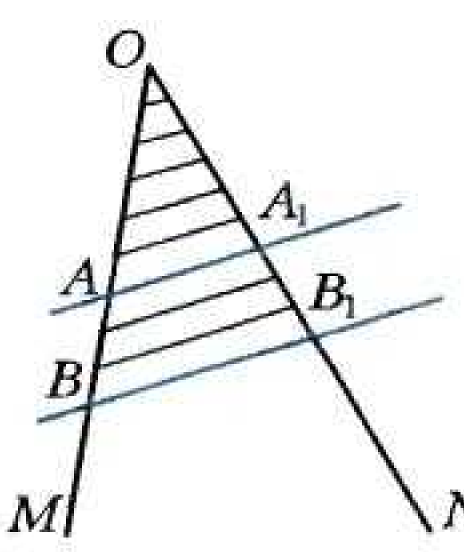
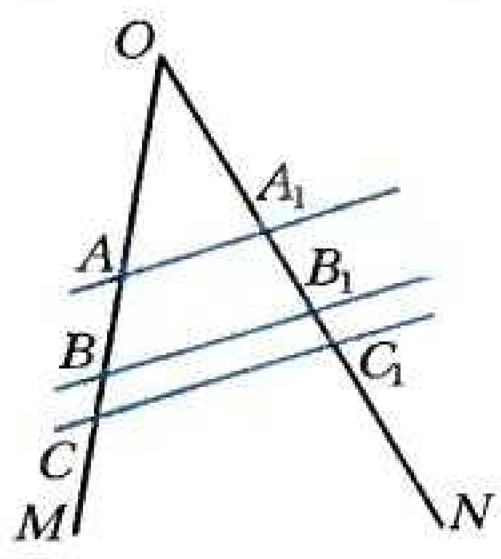


Рис. 115



Замечание. Теорема 11.2 остаётся справедливой, если вместо сторон угла взять две любые прямые.

Теорема 11.3

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Доказательство

На рисунке 116 медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажем, что медиана CC_1 также проходит через точку M и $\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$.

Проведём $B_1K \parallel AA_1$. Так как $AB_1 = B_1C$, то по теореме Фалеса $A_1K = KC$, т. е. $\frac{A_1C}{A_1K} = \frac{2}{1}$. Поскольку $BA_1 = A_1C$, то $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

Таким образом, медиана AA_1, пересекая медиану BB_1, делит её в отношении 2 : 1, считая от вершины B.

Аналогично можно доказать (сделайте это самостоятельно), что медиана CC_1 также делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины B (рис. 117).

А это означает, что все три медианы треугольника ABC проходят через одну точку. Мы доказали, что эта точка делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1. То, что эта точка делит в отношении 2 : 1 также медианы AA_1 и CC_1, доказывается аналогично. ◄

На рисунке 118 изображён треугольник ABC. Точка D принадлежит стороне AC. В этом случае говорят, что стороны AB и BC **прилежат** соответственно к отрезкам AD и DC.

Рис. 116

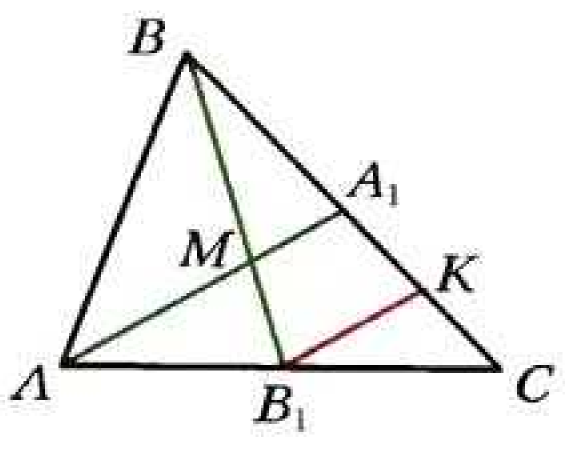


Рис. 117

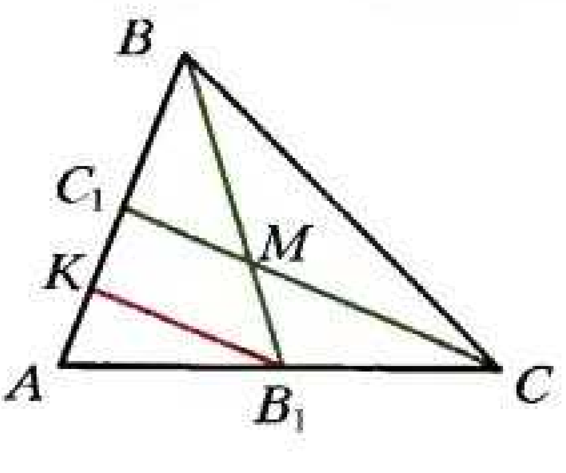
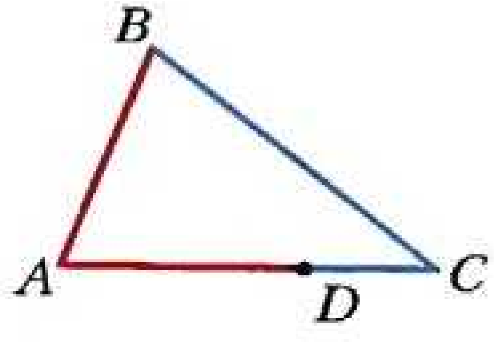


Рис. 118



Теорема 11.4

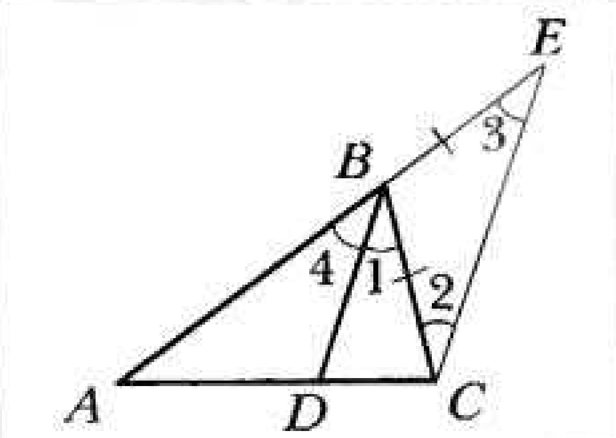
(свойство биссектрисы треугольника)

Биссектриса треугольника делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

Доказательство

На рисунке 119 отрезок BD – биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$.

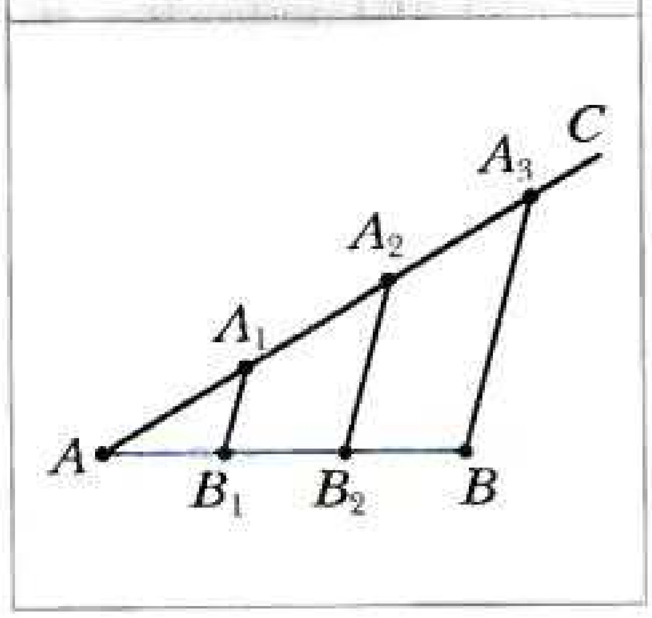
Рис. 119



Через точку C проведём прямую, параллельную прямой BD. Пусть проведённая прямая пересекает прямую AB в точке E. Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BD и CE и секущей BC; углы 3 и 4 равны как соответственные при параллельных прямых BD и CE и секущей AE. Поскольку BD – биссектриса треугольника ABC, то $\angle 4=\angle 1$. Отсюда $\angle 2=\angle 3$. Тогда треугольник CBE – равнобедренный с равными сторонами BC и BE. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BE}$. Поскольку $BE=BC$, то $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$. ◄

<u>Задача.</u> Разделите данный отрезок на три равных отрезка.

Рис. 120



Решение. Через конец A данного отрезка AB проведём луч AC, не принадлежащий прямой AB (рис. 120). Отметим на луче AC произвольную точку A_1. Затем отметим точки A_2 и A_3 так, чтобы $AA_1=A_1A_2=A_2A_3$. Проведём отрезок A_3B. Через точки A_1 и A_2 проведём прямые, параллельные прямой A_3B. Они пересекут отрезок AB в точках B_1 и B_2 соответственно. По теореме Фалеса $AB_1=B_1B_2=B_2B$. ◄

1. Сформулируйте теорему Фалеса.
2. Что называют отношением двух отрезков?
3. В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?
4. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.
5. Сформулируйте теорему о пересечении медиан треугольника.
6. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.

Практические задания

368. Начертите произвольный отрезок и разделите его на пять равных частей.

369. Начертите произвольный отрезок и разделите его на семь равных частей.

370. Начертите произвольный отрезок AB и постройте на нём точку C такую, что $AC : CB = 2 : 7$.

371. Начертите произвольный отрезок CD и постройте на нём точку E такую, что $CE : ED = 1 : 5$.

Упражнения

372. На рисунке 121 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_1 = 3$ см. Найдите отрезки B_1B_2, OB_3, B_1B_4.

373. На рисунке 122 $AB = BC$, $EF = 5$ см. Найдите отрезок ED.

374. Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины соответственно равны 12 см и 18 см. Изменится ли это отношение, если длины данных отрезков выразить в дециметрах? в миллиметрах?

375. Пропорциональны ли отрезки AB и CD соответственно отрезкам EF и MK, если:

1) $AB = 16$ см, $CD = 6$ см, $EF = 24$ см, $MK = 9$ см;

2) $AB = 8$ см, $CD = 20$ см, $EF = 10$ см, $MK = 35$ см?

376. Среди отрезков AB, CD, EF, MK, PS выберите четыре отрезка так, чтобы два из них были пропорциональны двум другим отрезкам, если $AB = 3$ см, $CD = 16$ см, $EF = 18$ см, $MK = 36$ см, $PS = 6$ см.

377. На рисунке 123 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ см, $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Найдите отрезок DE.

Рис. 121

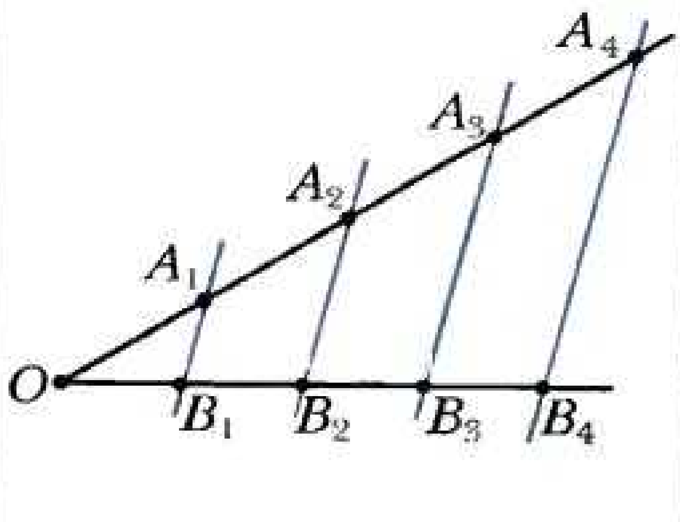


Рис. 122

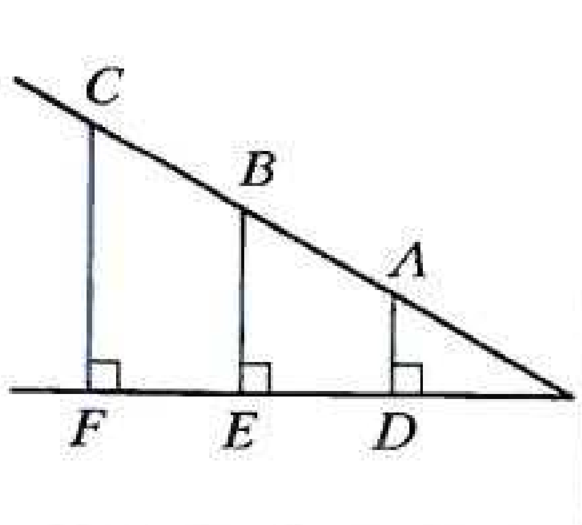
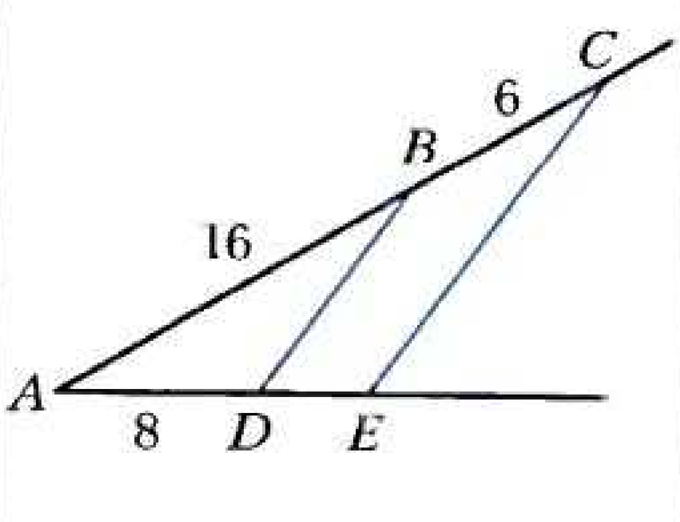
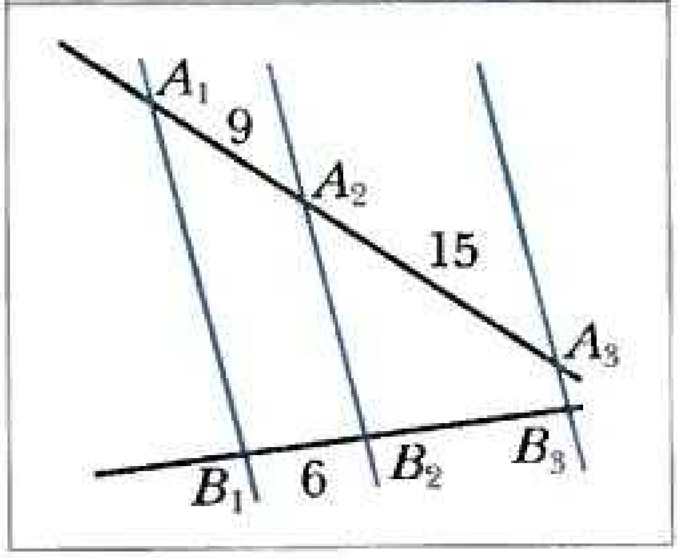


Рис. 123



378. На рисунке 124 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ см, $A_2A_3 = 15$ см, $B_1B_2 = 6$ см. Найдите отрезок B_2B_3.

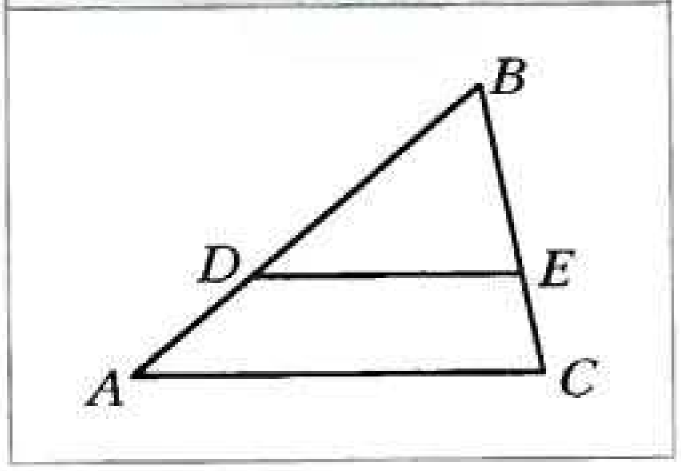
Рис. 124



379. На рисунке 125 $DE \parallel AC$, $BE = 10$ см, отрезок BD в два раза больше отрезка AD. Найдите отрезок BC.

380. Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону AC – в точке K, $AM = 9$ см, $BM = 6$ см, $KC = 8$ см. Найдите отрезок AK.

Рис. 125



381. Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину B с произвольной точкой стороны AC.

382. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до его большей стороны равно 7 см. Найдите длину меньшей стороны прямоугольника.

383. Высота равностороннего треугольника равна 12 см. На каком расстоянии от сторон треугольника находится точка пересечения его биссектрис?

384. Медиана CD треугольника ABC равна 9 см. Найдите отрезки CO и OD, где O – точка пересечения медиан треугольника ABC.

385. Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC, $AB = 40$ см, $AD = 30$ см, $CD = 12$ см. Найдите сторону BC.

386. Отрезок AM – биссектриса треугольника ABC, $AB = 48$ см, $AC = 32$ см, $BM = 18$ см. Найдите сторону BC.

387. Концы отрезка, не пересекающего данную прямую, удалены от этой прямой на 8 см и 14 см. Найдите расстояние от середины этого отрезка до данной прямой.

388. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AC равно 3 см, $\angle BAC = 30°$. Найдите хорду AB.

389. Отрезок BM – высота ромба $ABCD$, проведённая к стороне AD, $\angle A = 45°$, $AM = 8$ см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до стороны AD.

390. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 8$ см, AD – медиана, BE – высота, $BE = 12$ см. Из точки D опущен перпендикуляр DF на сторону AC. Найдите отрезок DF и $\angle ADF$.

391. Сторона AC треугольника ABC равна 24 см, сторона AB разделена на четыре равных отрезка, и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне AC. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие треугольнику.

392. Основания трапеции равны 16 см и 28 см. Одна из боковых сторон разделена на три равных отрезка, и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие трапеции.

393. Сторона DE треугольника DEF разделена на три равных отрезка, и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне DF. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие треугольнику DEF, если $DF = 15$ см.

394. Докажите, что средняя линия трапеции делит её диагонали пополам.

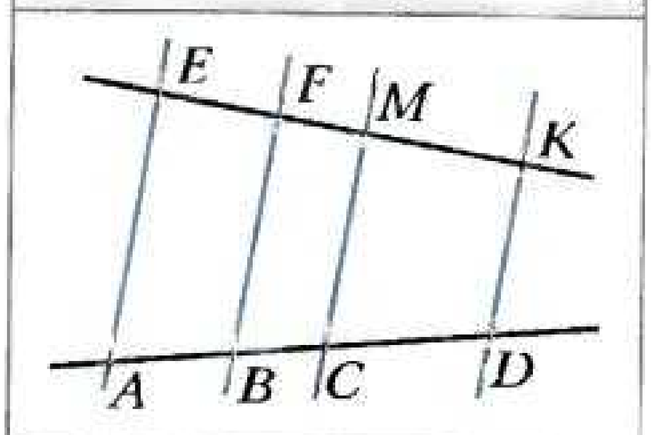
395. Средняя линия MK трапеции $ABCD$ пересекает диагональ AC в точке E, $ME = 4$ см, $EK = 6$ см. Найдите основания трапеции.

396. Диагонали трапеции пересекают её среднюю линию MK в точках E и F. Докажите, что $ME = KF$.

397. Основания трапеции равны 12 см и 22 см. Найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

398. На рисунке 126 $AE \parallel BF \parallel CM \parallel DK$, $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $CD = 35$ см, $EK = 48$ см. Найдите отрезки EF, FM и MK.

Рис. 126



399. Через точку D, отмеченную на стороне AC треугольника ABC, проведена прямая, которая параллельна стороне AB и пересекает сторону BC в точке E, $AD : DC = 5 : 7$, $BC = 36$ см. Найдите отрезок BE.

400. Точки M и K – середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых BK и DM принадлежит диагонали AC.

401. Докажите, что если две медианы треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.

402. В треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены медиана AM и высота BH. Найдите BH, если $AM = 45$ см, $\angle CAM = 30°$.

403. Даны отрезок AB и точка O, не принадлежащая прямой AB. Постройте треугольник, для которого отрезок AB является стороной, а точка O – точкой пересечения медиан.

404. Отрезок BD – биссектриса треугольника ABC, $AB = 28$ см, $BC = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AD и CD.

405. В треугольник ABC вписан ромб $CDEF$ так, что угол C у них общий, а вершины D, E и F ромба принадлежат соответственно сторонам AC, AB и BC треугольника. Найдите стороны AC и BC, если $AE = 30$ см, $BE = 12$ см, а периметр треугольника равен 105 см.

406. Стороны треугольника равны 39 см, 65 см и 80 см. Окружность, центр которой принадлежит большей стороне треугольника, касается двух других сторон. На какие отрезки центр этой окружности делит сторону треугольника?

407. Точка D – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На стороне AB отметили точку M так, что $AM : MB = 2 : 7$. В каком отношении прямая BD делит отрезок CM?

408. В равнобедренном треугольнике DEF провели высоту EC к его основанию и на боковой стороне EF отметили точку A. Отрезки EC и DA пересекаются в точке O, причём $AO : OD = 3 : 8$. Найдите отношение $EA : AF$.

409. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, равна 42 см, а основание относится к боковой стороне как 6 : 11. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

410. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 60 см, а центр вписанной окружности делит медиану, проведённую к основанию, в отношении 12 : 5. Найдите основание треугольника.

411. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM : MC = 3 : 10$. В каком отношении отрезок AM делит медиану BK треугольника ABC?

412. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM : MB = 4 : 3$. В каком отношении медиана BK: 1) делит отрезок CM; 2) делится отрезком CM?

413. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен их полуразности.

414. Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок x такой, что $a : x = b : c$.

415. Через точку O, принадлежащую данному углу, проведите отрезок, концы которого принадлежат сторонам данного угла и который делится точкой O: 1) пополам; 2) в отношении 2 : 3.

416. Постройте треугольник:

1) по стороне и углам, которые эта сторона образует с медианами, проведёнными к двум другим сторонам;

2) по двум медианам и углу между ними;

3) по высоте и медиане, проведённым к одной стороне, и углу между этой стороной и медианой, проведённой к другой стороне;

4) по трём медианам.

417. Постройте треугольник:

1) по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам;

2) по высоте, проведённой к одной из сторон, и медианам, проведённым к двум другим сторонам.

418. На сторонах угла A отмечены точки B_1, B_2, C_1, C_2 так, что $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (рис. 127). Докажите, что $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

419. Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC пересекает луч AC в точке D. Докажите, что $AB : BC = AD : CD$.

Упражнения для повторения

420. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. На дуге AC окружности с центром B, радиус которой равен a, отмечена точка E такая, что $\angle BEC = 75°$. Найдите отрезок AE.

421. Диагональ трапеции перпендикулярна её основаниям, тупой угол, прилежащий к большему основанию, равен 120°, боковая сторона, прилежащая к этому углу, — 12 см, а большее основание — 16 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

422. Равносторонний треугольник покрыт пятью меньшими равными между собой равносторонними треугольниками. Докажите, что для покрытия достаточно и четырёх таких треугольников.

§ 12. Подобные треугольники

На рисунке 128 вы видите уменьшенное изображение обложки учебника по геометрии. Вообще в повседневной жизни часто встречаются объекты, имеющие одинаковую форму, но разные размеры (рис. 129).

Рис. 127

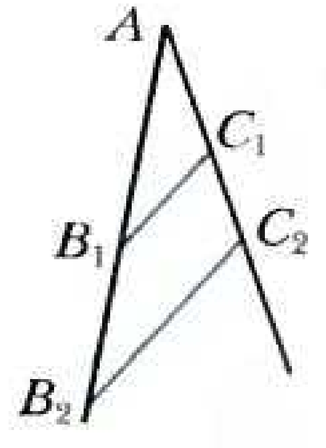


Рис. 128

Рис. 129

Геометрические фигуры, которые имеют одинаковую форму, называют **подобными**. Например, подобными являются любые две окружности, два квадрата, два равносторонних треугольника (рис. 130).

На рисунке 131 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны углы: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Стороны AB и A_1B_1 лежат против равных углов C и C_1. Такие стороны называют **соответственными**. Соответственными также являются стороны BC и B_1C_1, CA и C_1A_1.

Определение

Два треугольника называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника.

Например, на рисунке 132 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$. По определению эти треугольники подобны. Пишут: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (читают: «треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$»).

Рис. 130

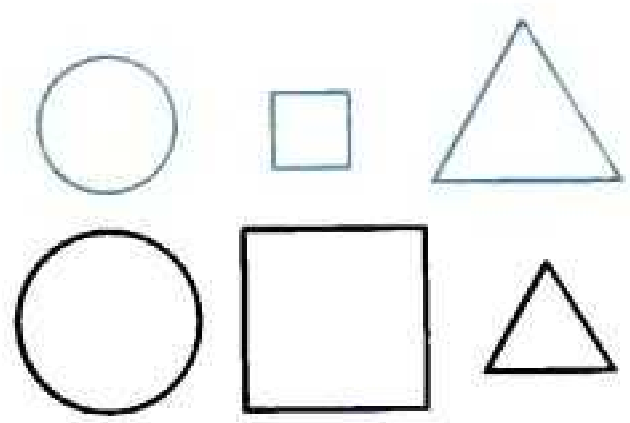


Рис. 131

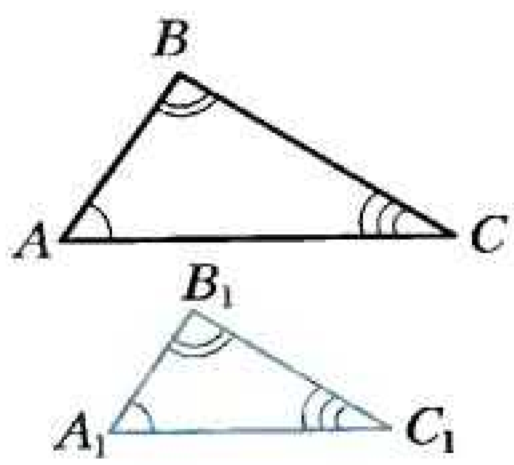
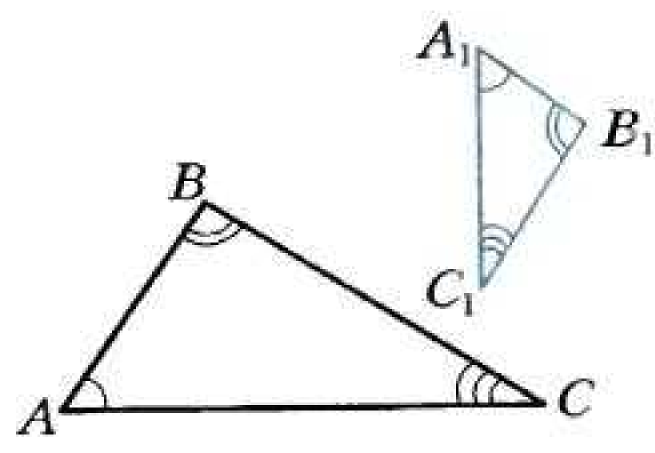


Рис. 132



Число 2, которому равно отношение соответственных сторон, называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным 2. Пишут: $\Delta ABC \overset{2}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$.

Так как $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, то можно также сказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Пишут: $\Delta A_1B_1C_1 \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \Delta ABC$.

Из определения равных треугольников следует, что любые два равных треугольника подобны с коэффициентом подобия, равным 1.

Если $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2$. Докажите это свойство самостоятельно.

Леммой называют вспомогательную теорему, которую используют для доказательства других теорем.

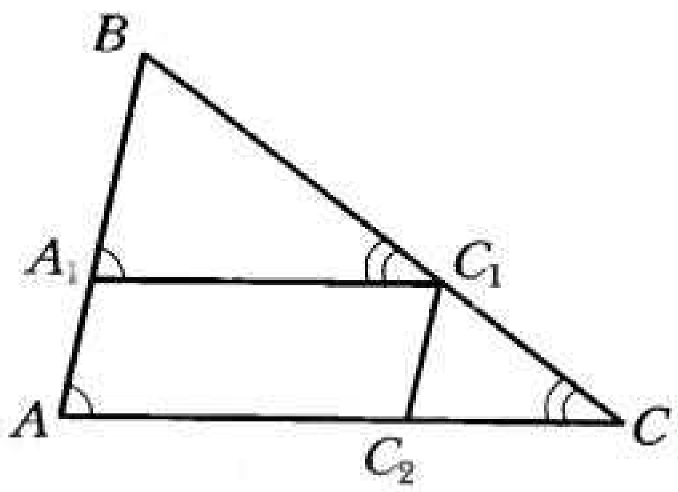
Лемма
о подобных треугольниках

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Доказательство

На рисунке 133 изображён треугольник ABC, отрезок A_1C_1 параллелен стороне AC. Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1BC_1$.

Рис. 133



Углы A и A_1, C и C_1 равны как соответственные при параллельных прямых A_1C_1 и AC и секущих AB и CB соответственно. Следовательно, углы рассматриваемых треугольников соответственно равны.

Покажем, что стороны BA и BC пропорциональны соответственно сторонам BA_1 и BC_1.

Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Отсюда $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$.

Проведём $C_1C_2 \parallel AB$. Получаем $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$. По определению четырёхугольник $AA_1C_1C_2$ — параллелограмм. Тогда $AC_2 = A_1C_1$. Отсюда $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким образом, доказано, что $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Следовательно, у треугольников ABC и A_1BC_1 углы соответственно равны и соответственные стороны пропорциональны. Поэтому по определению эти треугольники подобны. ◄

<u>**Задача.**</u> Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Решение. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k. Тогда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, откуда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Обозначим P_1 – периметр треугольника $A_1B_1C_1$, P – периметр треугольника ABC. Имеем:

$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC = k \cdot (AB + BC + AC) = kP$,

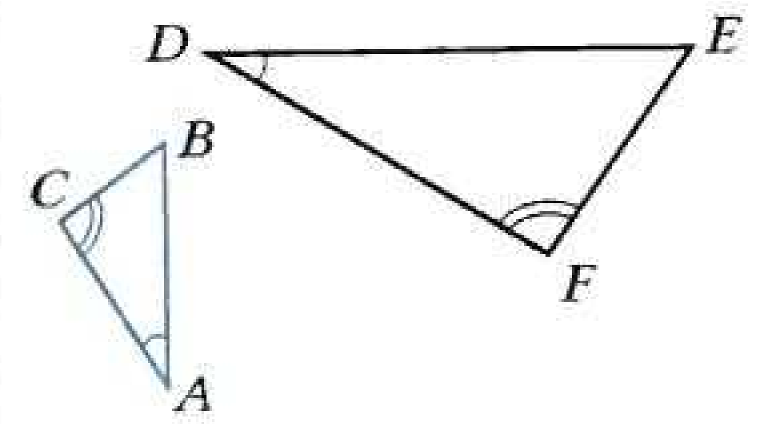
т. е. $\frac{P_1}{P} = k$. ◄

1. Какие два треугольника называют подобными?
2. Как найти коэффициент подобия двух подобных треугольников?
3. Сформулируйте лемму о подобных треугольниках.

Упражнения

423. На рисунке 134 изображены подобные треугольники ABC и DEF, равные углы которых отмечены одинаковым количеством дуг. Какие стороны этих треугольников пропорциональны? Запишите соответствующие равенства.

Рис. 134



424. Подобны ли треугольники ABC и MNK, если $\angle A = 40°$, $\angle B = 82°$, $\angle M = 40°$, $\angle K = 58°$, $AB = 2{,}4$ см, $BC = 2{,}1$ см, $AC = 3{,}9$ см, $MN = 3{,}2$ см, $NK = 2{,}8$ см, $MK = 5{,}2$ см?

425. Известно, что $\Delta DEF \sim \Delta MCP$, причём стороне DE соответствует сторона MC и стороне DF соответствует сторона MP, $MC = 12$ см, $MP = 8$ см, $EF = 4{,}5$ см. Найдите неизвестные стороны данных треугольников.

426. Известно, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, причём $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 9$ см. Найдите стороны B_1C_1 и A_1C_1.

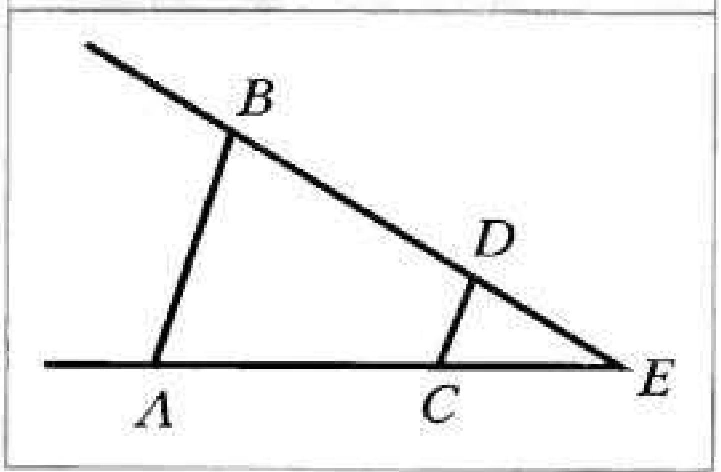
427. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, причём стороне AB соответствует сторона A_1B_1 и стороне BC соответствует сторона B_1C_1, $\angle A = 25°$, $\angle B = 70°$.

428. Стороны MK и DE, KT и EF – соответственные стороны подобных треугольников MKT и DEF, $MK = 18$ см, $KT = 16$ см, $MT = 28$ см, $MK : DE = 4 : 5$. Найдите стороны треугольника DEF.

429. На рисунке 135 $AB \parallel CD$. Найдите на этом рисунке подобные треугольники. Запишите пропорции, которые начинаются с отношения:

1) $\frac{AE}{CE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AB}{AE}$.

Рис. 135



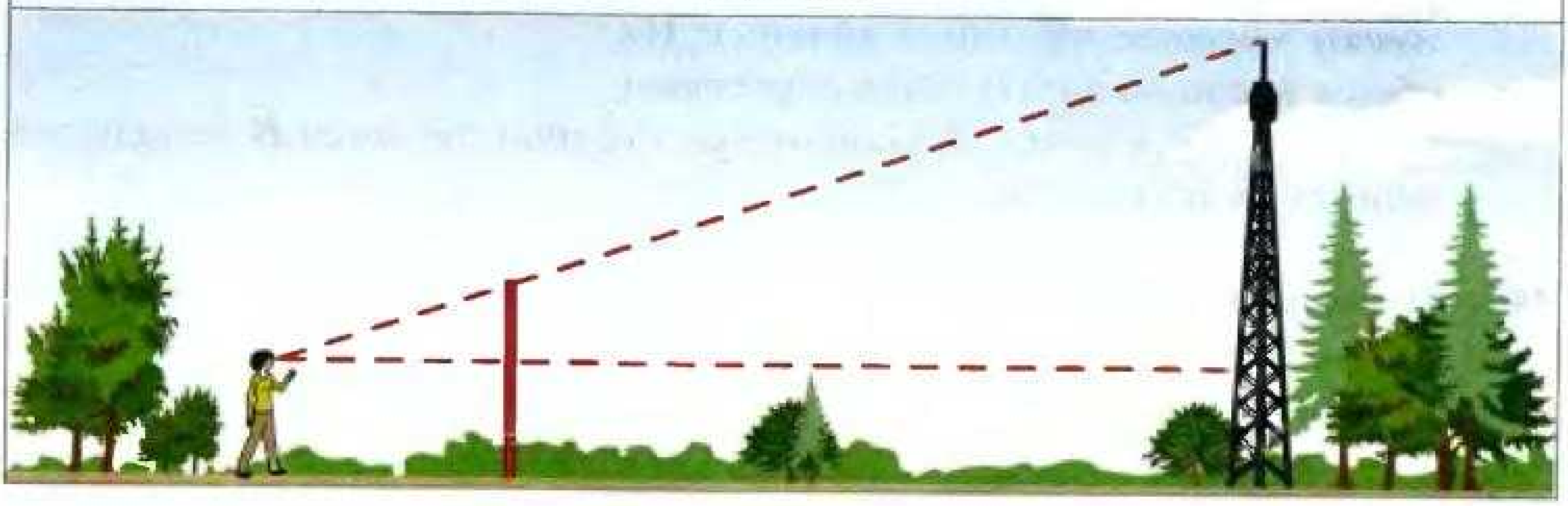
430. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D, а сторону BC – в точке E.

1) Найдите BD, если $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см.
2) Найдите AD, если $AB = 28$ см, $BC = 63$ см, $BE = 27$ см.

431. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$ см. Через точку M стороны AB проведена прямая, которая параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке K. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC, если $AM = 4$ см, $MK = 8$ см, $AK = 9$ см.

432. Найдите высоту вышки (рис. 136), если расстояния от наблюдателя до шеста и вышки соответственно равны 1,5 м и 39 м, высота шеста – 3 м, а рост наблюдателя – 1,8 м.

Рис. 136



433. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите CE, если $DE = 40$ см, $BC : AD = 4 : 5$.

434. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите меньшее основание трапеции, если большее основание AD равно 42 см, $AB = 9$ см, $BM = 54$ см.

435. Пользуясь определением подобных треугольников, докажите, что любые два равносторонних треугольника подобны.

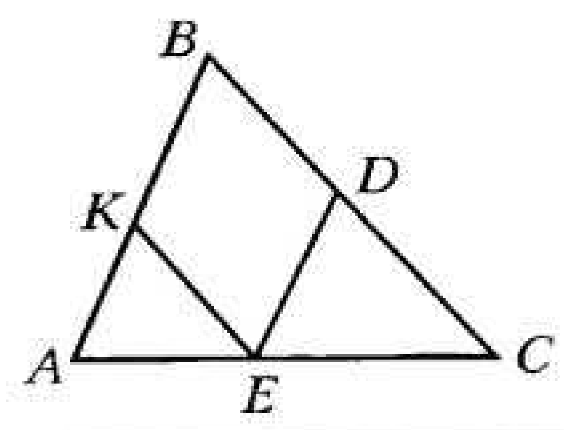
436. Точки M и K – середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$ соответственно. Пользуясь определением подобных треугольников, докажите, что $\Delta MDK \sim \Delta BCD$.

437. Стороны треугольника относятся как 5 : 4 : 7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: 1) периметр равен 64 см; 2) меньшая сторона равна 24 см.

438. Стороны треугольника равны 15 см, 25 см и 35 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: 1) периметр равен 45 см; 2) разность наибольшей и наименьшей сторон равна 16 см.

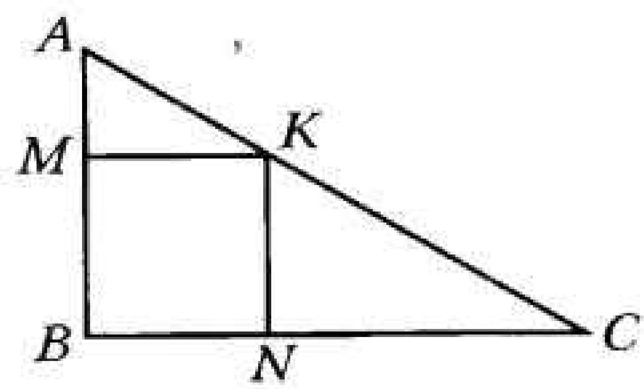
439. На рисунке 137 изображены треугольник ABC и вписанный в него ромб $BDEK$. Найдите сторону ромба, если $AB = 10$ см, $BC = 15$ см.

Рис. 137



440. На рисунке 138 изображены прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$) и вписанный в него квадрат $BMKN$. Найдите CN, если $BM = 6$ см, $AB = 10$ см.

Рис. 138



441. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 8 см и 12 см соответственно имеют внешнее касание в точке A. Их общая внешняя касательная пересекает прямую O_1O_2 в точке B. Найдите расстояния от точки B до центров данных окружностей.

442. Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см. Через середину высоты треугольника, опущенной на его основание, проведена прямая, параллельная боковой стороне. Найдите периметр треугольника, который эта прямая отсекает от данного.

443. В равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а боковая сторона – 18 см, вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружности с боковыми сторонами треугольника.

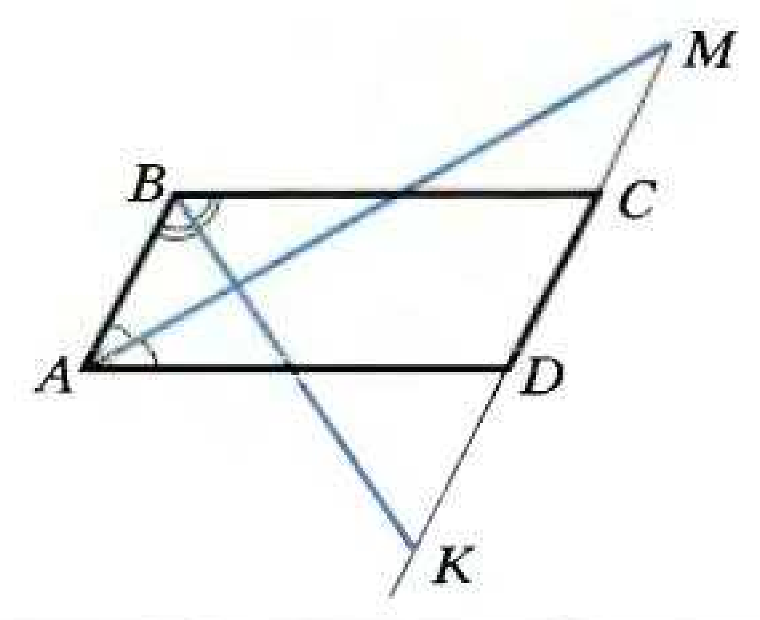
444. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120^\circ$, BD – биссектриса. Найдите отрезок BD.

Упражнения для повторения

445. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ в 2 раза больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B параллелограмма пересекают прямую CD

в точках M и K соответственно (рис. 139). Найдите стороны параллелограмма, если $MK = 18$ см.

Рис. 139



446. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, угол AOD на 60° больше угла AOB, $AC = 24$ см. Найдите периметр треугольника COD.

447. Окружность, центр которой принадлежит стороне AB треугольника ABC, проходит через точку B, касается стороны AC в точке C и пересекает сторону AB в точке D, причём $AD : BD = 1 : 2$. Найдите углы: 1) треугольника ABC; 2) треугольника BCD.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

448. На плоскости отметили 25 точек так, что среди любых трёх из них найдутся две точки, расстояние между которыми меньше единицы. Докажите, что существует окружность единичного радиуса, которая содержит не менее 13 данных точек.

§ 13. Первый признак подобия треугольников

Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются условия $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то по определению эти треугольники подобны.

Можно ли по меньшему количеству условий определять подобие треугольников? На этот вопрос отвечают признаки подобия треугольников.

Теорема 13.1
(первый признак подобия треугольников: по двум углам)

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Если $AB = A_1B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников, а следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть, например, $AB > A_1B_1$. Отложим на стороне BA отрезок BA_2, равный стороне B_1A_1. Через точку A_2 проведём прямую A_2C_2, параллельную стороне AC (рис. 140).

Углы A и BA_2C_2 – соответственные при параллельных прямых A_2C_2 и AC и секущей AA_2. Отсюда $\angle A = \angle BA_2C_2$. Но $\angle A = \angle A_1$. Получаем, что $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Следовательно, треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников. По лемме о подобных треугольниках $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$. Следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$. ◂

Задача 1. Средняя линия трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 24 см, а её диагонали пересекаются в точке O, $AO : OC = 5 : 3$. Найдите основания трапеции.

Решение. Рассмотрим треугольники AOD и COB (рис. 141). Углы AOD и BOC равны как вертикальные, углы CAD и ACB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, треугольники AOD и COB подобны по двум углам.

Рис. 140

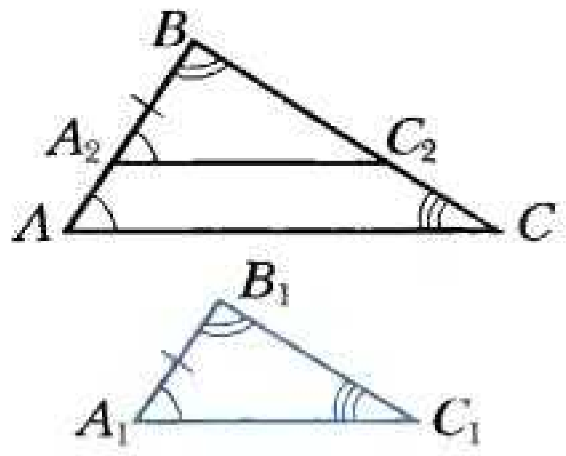
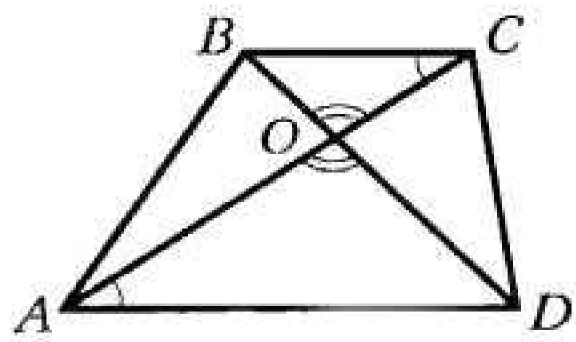


Рис. 141



Тогда $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.

Пусть $BC = 3x$ см, тогда $AD = 5x$ см.

Так как средняя линия трапеции равна 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Имеем: $3x + 5x = 48$. Отсюда $x = 6$.

Следовательно, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Ответ: 18 см, 30 см. ◂

Задача 2 (свойство пересекающихся хорд). Докажите, что если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

Решение. Рассмотрим треугольники ACM и DBM (рис. 142). Углы 3 и 4 равны как вертикальные, углы 1 и 2 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ACM и DBM подобны по первому признаку подобия треугольников. Тогда $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$. Отсюда $AM \cdot MB = DM \cdot MC$. ◂

Задача 3 (свойство касательной и секущей). Докажите, что если через точку A к окружности проведены касательная AM (M – точка касания) и прямая (секущая), пересекающая окружность в точках B и C, то $AM^2 = AC \cdot AB$.

Решение. Рассмотрим треугольники AMB и ACM (рис. 143). У них угол A – общий. По свойству угла между касательной и хордой (см. ключевую задачу § 9) $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MB$. Угол MCB – вписанный угол и опирается на дугу MB, поэтому $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup MB$. Отсюда $\angle AMB = \angle MCB$. Следовательно, треугольники AMB и ACM подобны по первому признаку подобия треугольников. Тогда $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. Отсюда $AM^2 = AC \cdot AB$. ◂

1. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте свойство пересекающихся хорд.
3. Сформулируйте свойство касательной и секущей, проведённых к окружности через одну точку.

Упражнения

449. На рисунке 144 $\angle BAC = \angle BED$. Подобны ли треугольники ABC и EDB? В случае утвердительного ответа укажите пары соответственных сторон.

Рис. 142

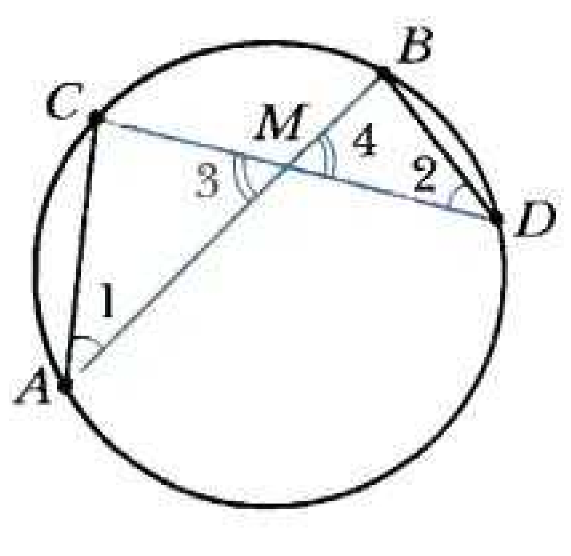


Рис. 143

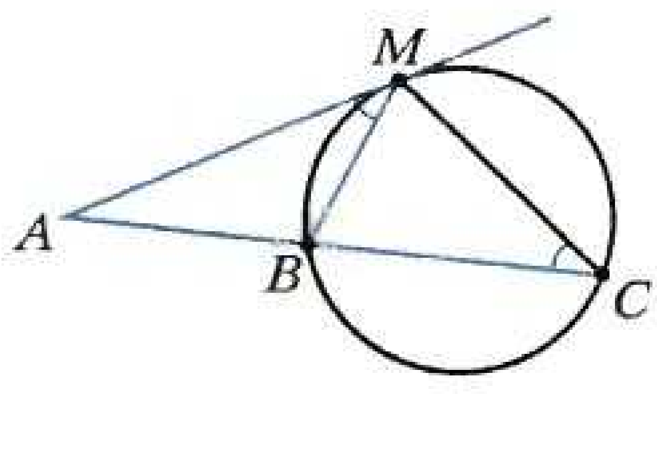
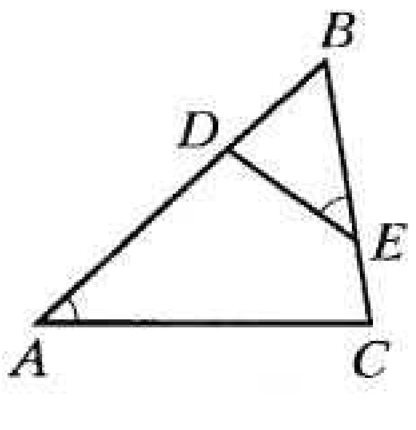


Рис. 144



450. На рисунке 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажите на этом рисунке все пары подобных треугольников.

451. На рисунке 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

Рис. 145

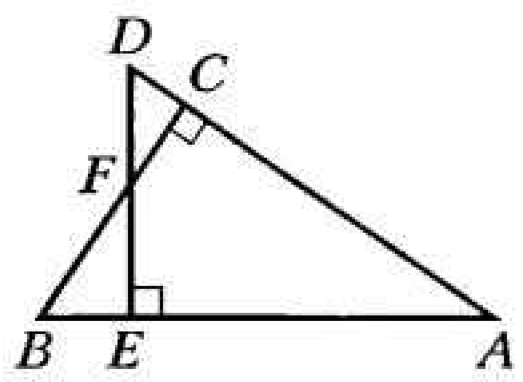
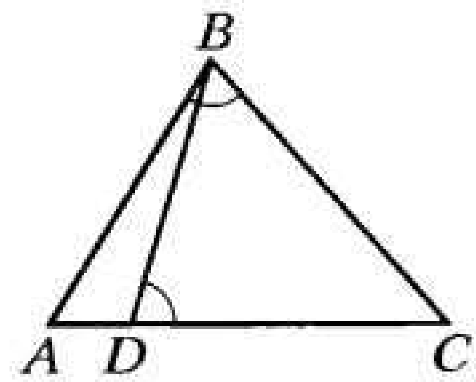
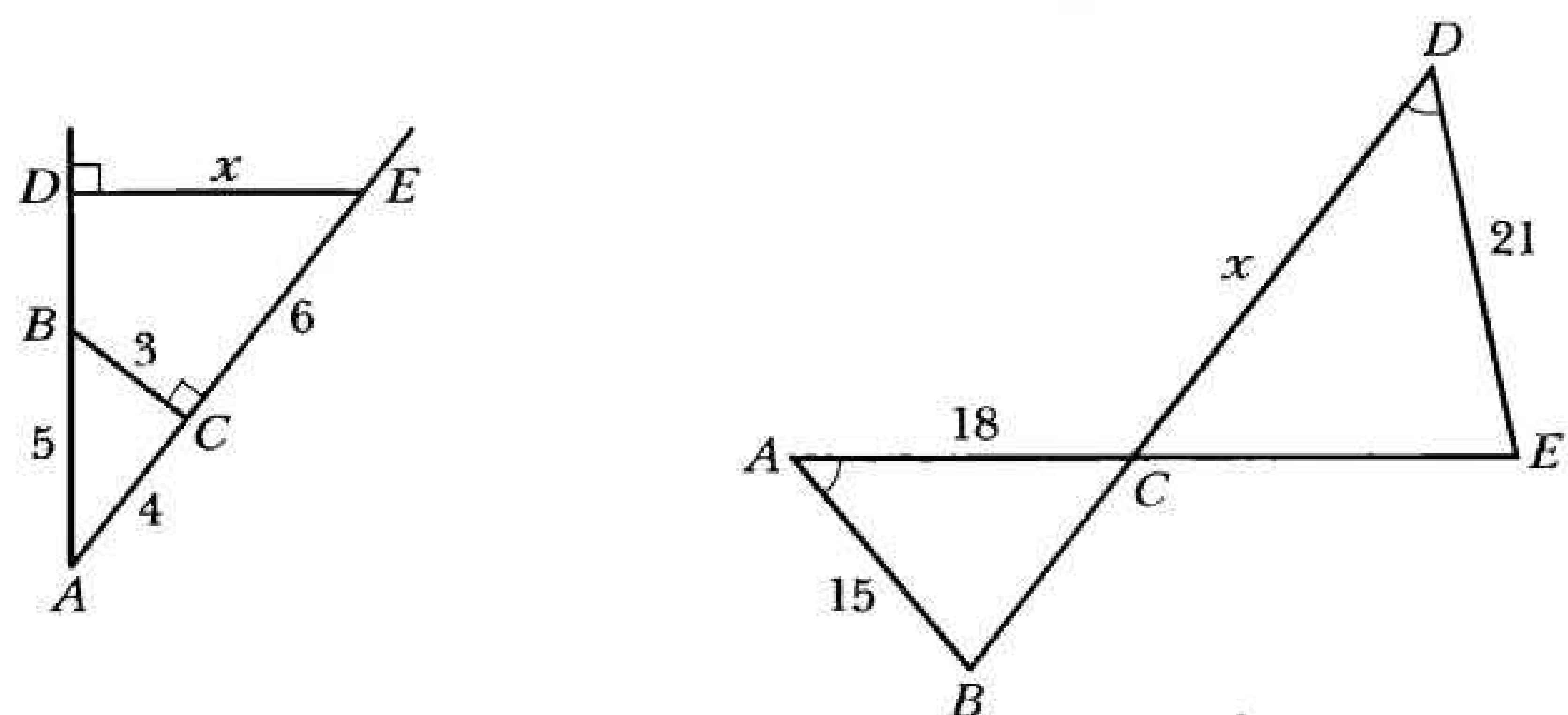


Рис. 146



452. Укажите пары подобных треугольников, изображённых на рисунке 147, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

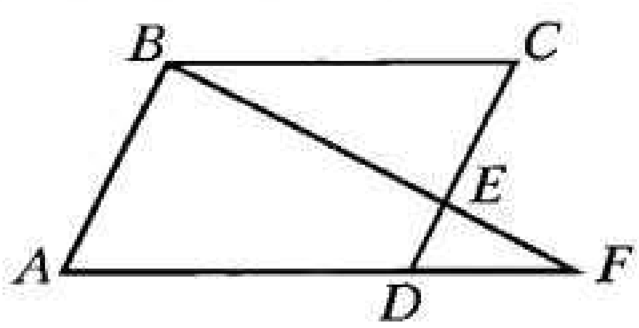
Рис. 147



а б

453. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Найдите неизвестные стороны данных треугольников.

Рис. 148



454. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 148) отмечена точка E, прямые BE и AD пересекаются в точке F,

$CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Найдите отрезки EF и FD.

455. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка пересечения диагоналей, $AO = 16$ см. Найдите отрезок OC.

456. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O, $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см. Найдите основание AD.

457. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если среди углов одного из них есть угол, равный $38°$, а среди углов другого — угол, равный $52°$?

458. Докажите, что два равнобедренных треугольника подобны, если углы при их вершинах равны.

459. Можно ли утверждать, что два равнобедренных треугольника подобны, если у них есть: 1) по равному острому углу; 2) по прямому углу; 3) по равному тупому углу?

460. Угол между боковой стороной и основанием одного равнобедренного треугольника равен углу между боковой стороной и основанием другого равнобедренного треугольника. Боковая сторона и основание первого треугольника равны 18 см и 10 см соответственно, а основание второго — 8 см. Найдите боковую сторону второго треугольника.

461. Из вершины прямого угла треугольника опущена высота на гипотенузу. Сколько подобных треугольников образовалось при этом?

462. Стороны параллелограмма равны 20 см и 14 см, высота, проведённая к большей стороне, равна 7 см. Найдите высоту параллелограмма, проведённую к меньшей стороне.

463. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O, $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AO и OC.

464. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Найдите отрезки, на которые диагональ AC делится точкой пересечения диагоналей.

465. Докажите, что в подобных треугольниках биссектрисы, проведённые из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

466. Докажите, что в подобных треугольниках высоты, проведённые из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

467. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 см и 63 см, $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите диагональ AC.

468. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D такую, что $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABD.

469. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а больший катет – 16 см. Найдите отрезки, на которые серединный перпендикуляр гипотенузы делит больший катет.

470. Объясните с помощью рисунка 149, как можно найти ширину (BM) реки, используя подобие треугольников.

471. Изображение дерева, удалённого на 60 м от объектива фотоаппарата, имеет на плёнке высоту 8 мм (рис. 150). Расстояние от объектива до изображения равно 40 мм. Какова высота дерева?

Рис. 149

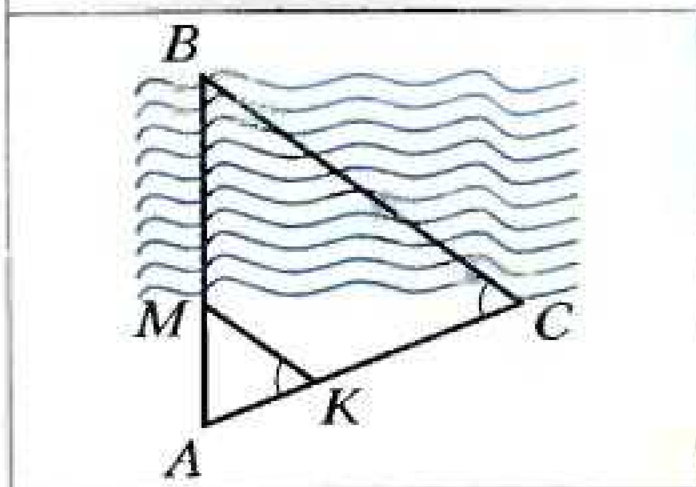
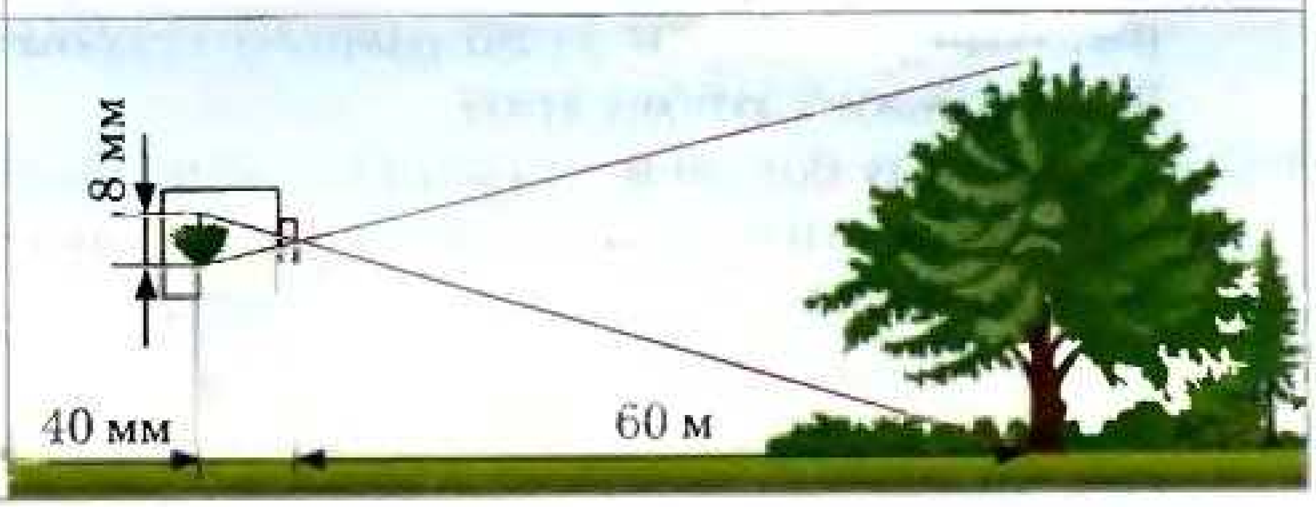
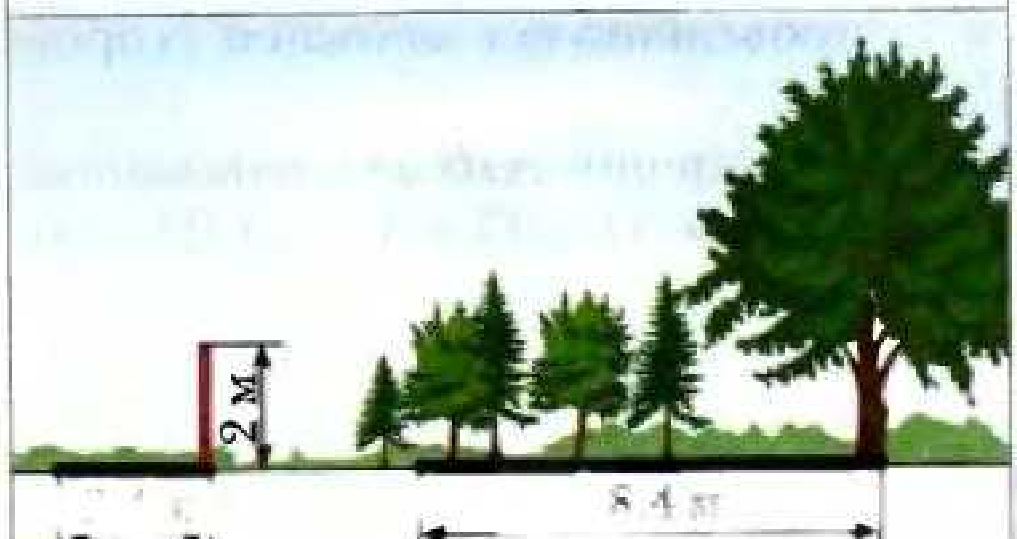


Рис. 150



472. Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 8,4 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м в это же время суток равна 2,4 м (рис. 151).

Рис. 151



473. Может ли прямая пересекать две стороны равнобедренного треугольника, отсекать от него треугольник, ему подобный, и не быть параллельной третьей стороне?

474. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Найдите отрезок DM.

475. Хорды MK и NP окружности пересекаются в точке F, $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а отрезок NF в 3 раза длиннее отрезка PF. Найдите хорду NP.

476. Точка K делит хорду AC окружности пополам, а хорду DE – на отрезки длиной 2 см и 32 см. Найдите хорду AC.

477. Точка E делит хорду CD окружности на отрезки длиной 15 см и 16 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от точки E до центра окружности равно 4 см.

478. Хорда MK окружности делится точкой P на два отрезка длиной 8 см и 12 см. Найдите расстояние от точки P до центра окружности, если её радиус равен 11 см.

479. Через точку A проведены к окружности касательная AM (M – точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках K и P (точка K лежит между точками A и P). Найдите KP, если $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

480. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а другая пересекает окружность в точках C и D (точка C лежит между точками A и D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Найдите отрезок AD.

481. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C), а другая – в точках D и E (точка D лежит между точками A и E).

1) Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Найдите AE, если $AB = 18$ см, $BC = 12$ см и $AD : DE = 5 : 7$.

482. В окружности, радиус которой равен 8 см, проведена хорда AB. На прямой AB вне отрезка AB отметили точку C такую, что $AC : BC = 1 : 4$. Найдите расстояние от точки C до центра окружности, если $AB = 9$ см.

483. В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его соседние вершины принадлежат стороне AC, а две другие – сторонам AB и BC соответственно. Найдите сторону квадрата, если $AC = a$, а высота, проведённая к стороне AC, равна h.

484. В треугольнике ABC известно, что $BC = 72$ см, AD – высота, $AD = 24$ см. В данный треугольник вписан прямоугольник $MNKP$ так, что вершины M и P принадлежат стороне BC, а вершины N и K – сторонам AB и AC соответственно. Найдите стороны прямоугольника, если $MP : MN = 9 : 5$.

Упражнения для повторения

485. Найдите углы параллелограмма, если угол между его высотами, проведёнными из одной вершины, равен: 1) 20°; 2) 130°.

486. Две окружности с центрами O_1 и O_2, радиусы которых равны, пересекаются в точках A и B. Отрезок O_1O_2 пересекает данные окружности в точках C и D. Докажите, что четырёхугольник $ACBD$ – ромб.

487. Один из углов прямоугольной трапеции равен 135°, средняя линия — 21 см, а основания относятся как 5 : 2. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

488. Как два равных выпуклых четырёхугольника разрезать на части, из которых можно составить параллелограмм?

Когда сделаны уроки

Теорема Менелая

Точки, принадлежащие одной прямой, называют **коллинеарными**. Две точки коллинеарны всегда.

В этом рассказе вы узнаете об одной знаменитой теореме, которая служит критерием коллинеарности трёх точек. Эта теорема носит имя древнегреческого математика и астронома Менелая Александрийского (I–II вв. н. э.).

Теорема Менелая

На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC — точка B_1. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

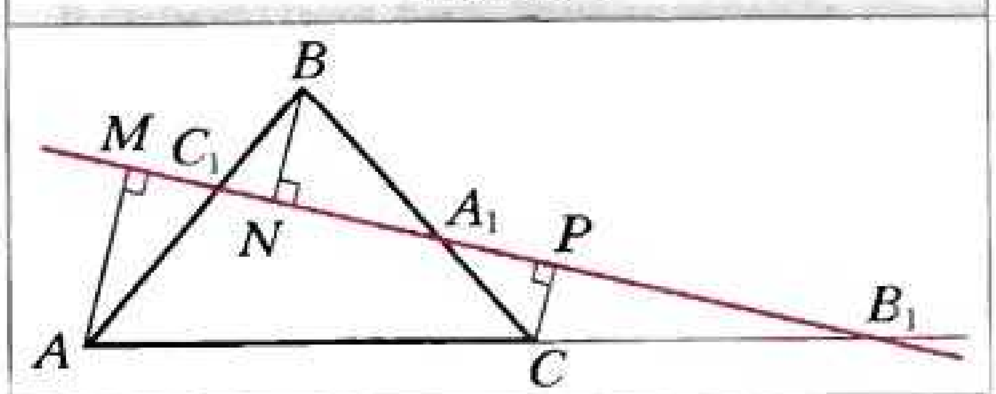
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доказательство

Сначала докажем необходимое условие коллинеарности: если точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, то выполняется равенство (*).

Из вершин треугольника ABC опустим перпендикуляры AM, BN и CP на прямую C_1B_1 (рис. 152). Поскольку $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, то треугольники AMC_1 и BNC_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$. Из подобия треугольников BNA_1 и CPA_1 получаем, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$. Из подобия треугольников B_1CP

Рис. 152



и B_1AM следует равенство $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$. Перемножив почленно левые и правые части пропорций $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$, получаем $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM}{BN} \cdot \frac{BN}{CP} \cdot \frac{CP}{AM} = 1$.

Теперь докажем достаточное условие коллинеарности: если выполняется равенство (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Пусть прямая C_1B_1 пересекает сторону BC треугольника ABC в некоторой точке A_2 (рис. 153). Поскольку точки C_1, A_2, B_1 лежат на одной прямой, то из доказанного выше можно записать: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Сопоставляя это равенство с равенством (*), приходим к выводу, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, т. е. точки A_2 и A_1 делят отрезок BC в одном и том же отношении, а значит, эти точки совпадают. Отсюда следует, что прямая C_1B_1 пересекает сторону BC в точке A_1. ◄

Заметим, что теорема остаётся справедливой и тогда, когда точки A_1 и C_1 лежат не на сторонах треугольника ABC, а на их продолжениях (рис. 154).

Рис. 153

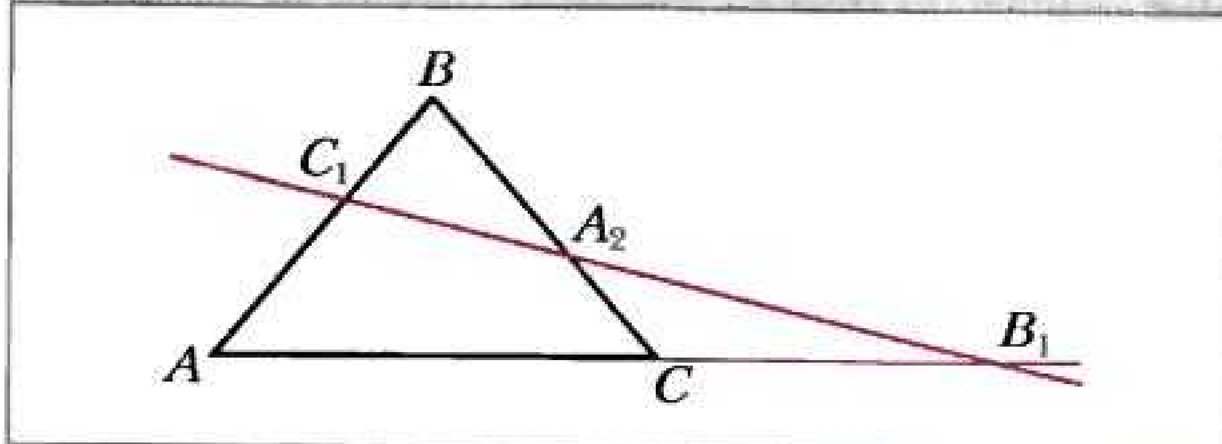
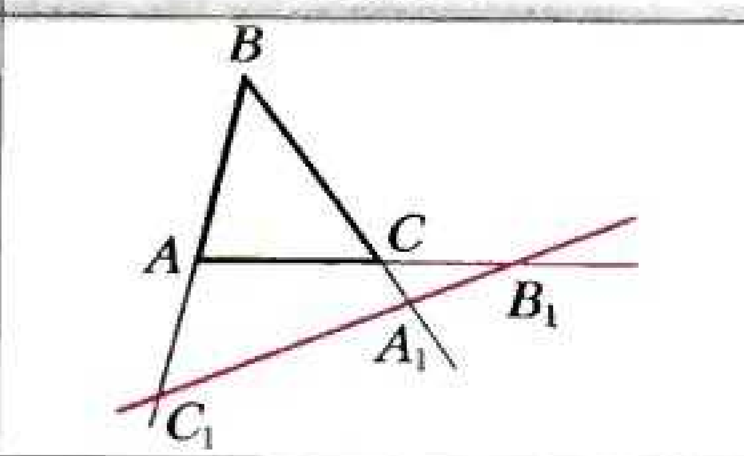


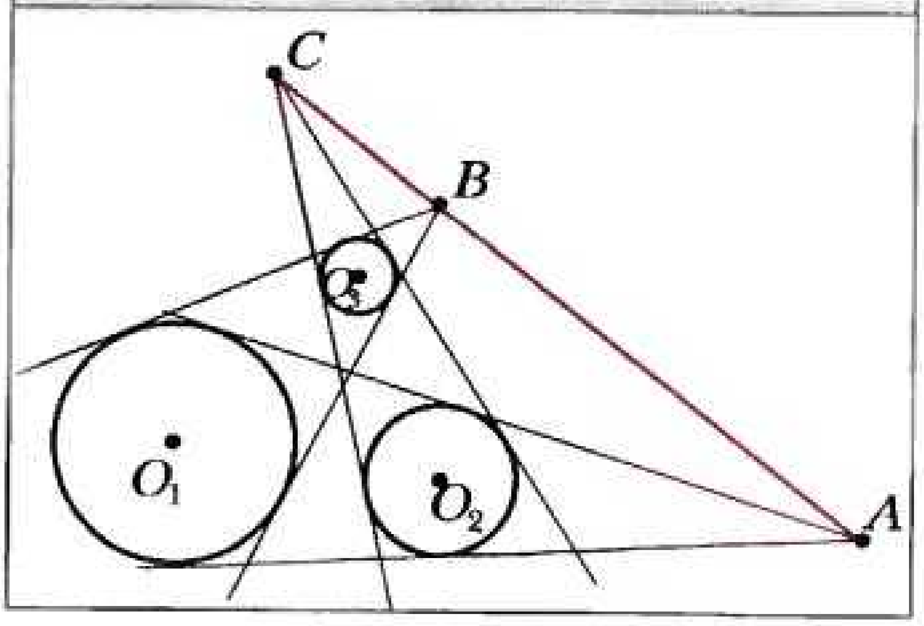
Рис. 154



Упражнения

1. Общие касательные к трём окружностям пересекаются в точках A, B и C (рис. 155). Докажите, что эти точки коллинеарны. Указание. Примените теорему Менелая к треугольнику $O_1O_2O_3$ и точкам A, B, C, которые лежат на продолжениях его сторон.

Рис. 155



2. Окружность с центром O_1 касается двух окружностей с центрами O_2 и O_3 в точках B и A соответственно (рис. 156). Докажите, что прямой AB принадлежит точка C – точка пересечения общих касательных к окружностям с центрами O_2 и O_3.

3. В точках A, B, C к окружности проведены касательные (рис. 157). Докажите, что точки M, N и P коллинеарны.

Указание. Применяя теорему Менелая к треугольнику ABC, воспользуйтесь ключевой задачей 2 § 13.

Рис. 156

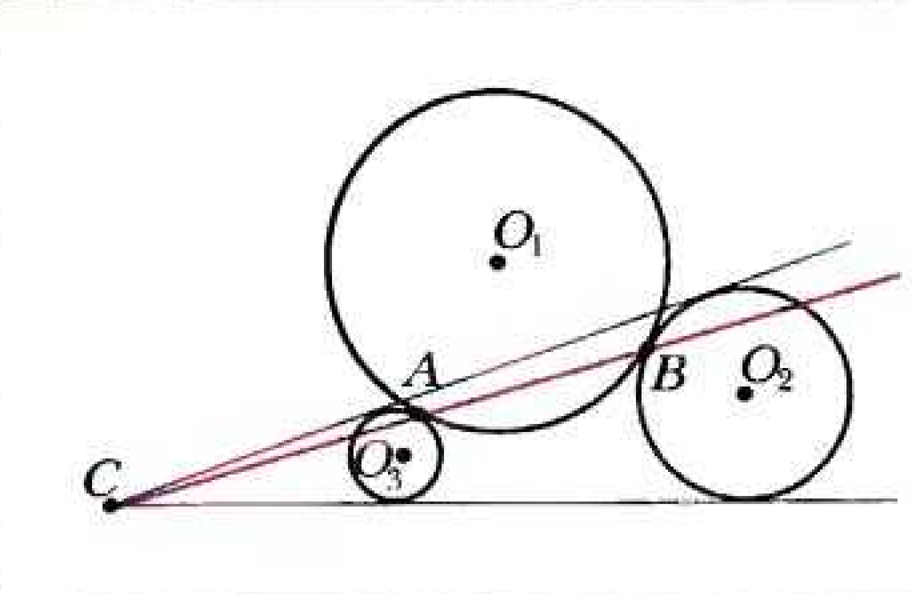
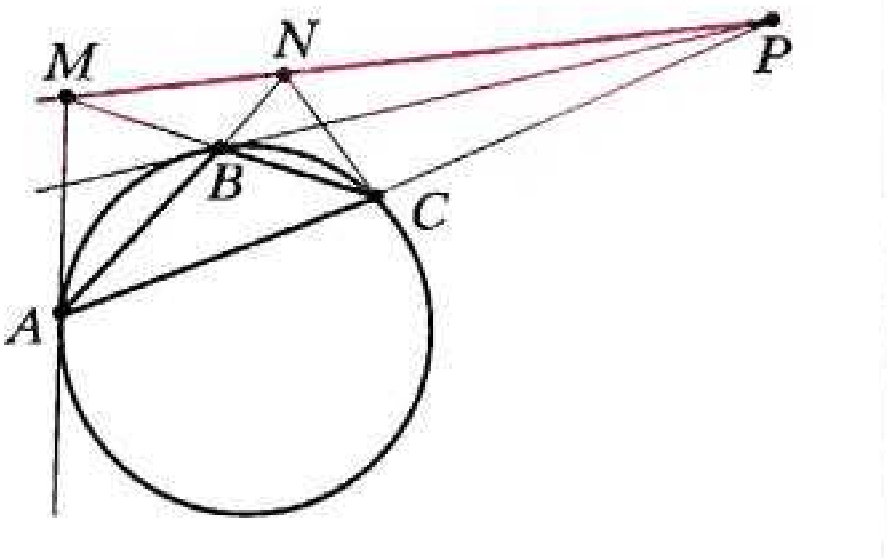


Рис. 157



4. Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC соответственно в точках D, E, F. Докажите, что середины отрезков DC, AE, BF лежат на одной прямой (эту прямую называют *прямой Гаусса*).

Указание. Примените теорему Менелая к треугольнику, вершины которого являются серединами сторон треугольника ABC.

Карл Фридрих Гаусс
(1777–1855)

Выдающийся немецкий математик, астроном, физик, геодезист.

В его творчестве органически сочетались исследования по теоретической и прикладной математике. Работы Гаусса оказали большое влияние на всё дальнейшее развитие алгебры, теории чисел, геометрии, теории электричества и магнетизма.

Клавдий Птолемей
(ок. 100 — ок. 178)

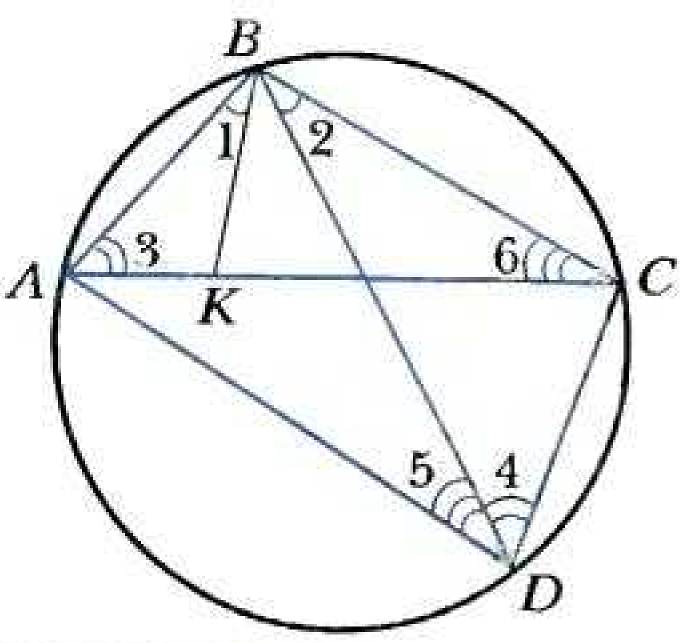
Древнегреческий математик и астроном. Автор геоцентрической модели мира. Разработал математическую теорию движения планет, позволяющую вычислять их положение. Создал прообраз современной системы координат.

Теорема Птолемея

Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.

Рис. 158



Доказательство

На рисунке 158 изображён вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$. Докажем, что $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

На диагонали AC отметим точку K так, что $\angle 1 = \angle 2$. Углы 3 и 4 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ABK и DBC подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, т. е.

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \qquad (1)$$

Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABD = \angle KBC$. Углы 5 и 6 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому $\Delta KBC \backsim \Delta ABD$. Отсюда $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, т. е.

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим:
$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, т. е.
$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot (AK + KC) = BD \cdot AC$. ◄

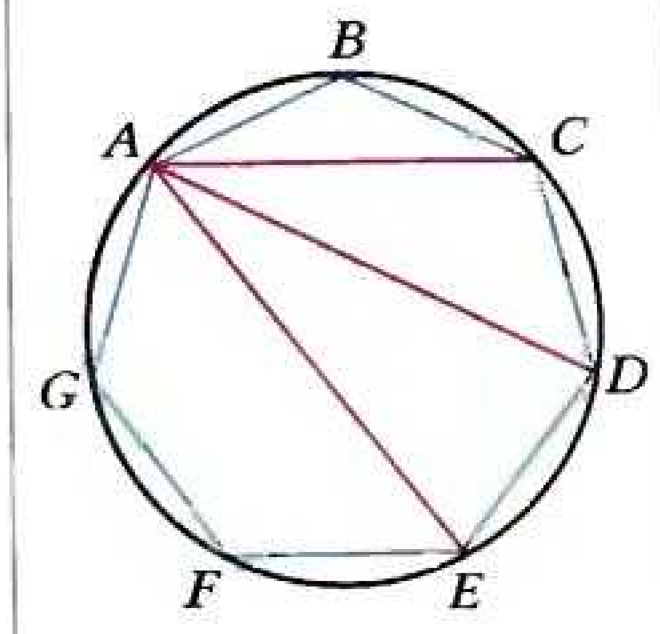
Упражнения

1. Пусть M – произвольная точка окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

2. На окружности отмечены точки A, B, C, D так, что $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$.

3. На рисунке 159 изображён вписанный в окружность семиугольник $ABCDEFG$, у которого все стороны равны. Докажите, что $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

Рис. 159



§ 14. Второй и третий признаки подобия треугольников

Теорема 14.1
(второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ и $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Если $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, а следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников, т. е. эти треугольники подобны.

Пусть, например, $k > 1$, т. е. $AB > A_1B_1$ и $BC > B_1C_1$. На сторонах BA и BC отметим соответственно точки A_2 и C_2 так, что $BA_2 = A_1B_1$ и $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 160). Тогда $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

Покажем, что $A_2C_2 \parallel AC$. Допустим, что это не так. Тогда на стороне BC отметим точку M такую, что $A_2M \parallel AC$. Имеем: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$. Но $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, тогда $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, т. е. $BC_2 = BM$. Следовательно, буквами M и C_2 обозначена одна и та же точка. Тогда $A_2C_2 \parallel AC$.

По лемме о подобных треугольниках получаем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$. Треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. ◄

Теорема 14.2

(третий признак подобия треугольников: по трём сторонам)

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если $k = 1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников, а следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть, например, $k > 1$. На сторонах BA и BC отметим соответственно точки A_2 и C_2 такие, что $BA_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 161). Тогда $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. Отсюда получаем, что $A_2C_2 \parallel AC$ (мы установили этот факт при доказательстве второго признака подобия треугольников). Следовательно, по лемме о подобных треугольниках получаем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$, причём коэффициент подобия равен k. Тогда $\frac{CA}{C_2A_2} = k$, но по условию $\frac{CA}{C_1A_1} = k$.

Рис. 160

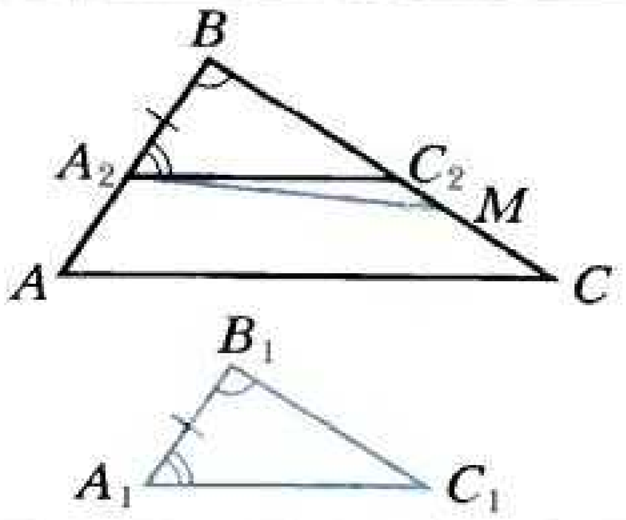
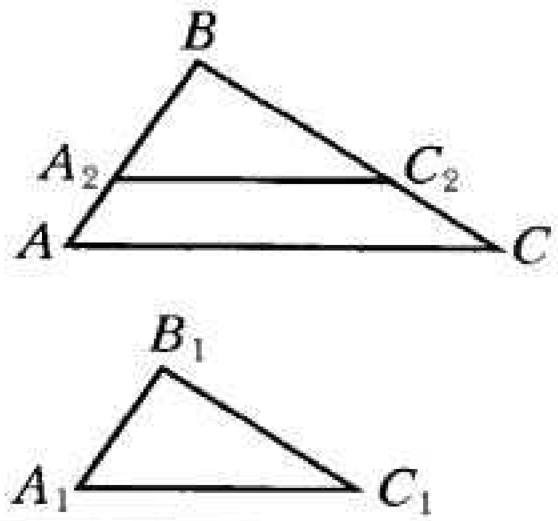


Рис. 161



Отсюда $A_1C_1 = A_2C_2$. Следовательно, треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. С учётом того, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$, получаем: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ◄

Задача. Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Решение. На рисунке 162 отрезки AA_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC. Докажем, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1BC_1$.

В прямоугольных треугольниках ABA_1 и CBC_1 острый угол B – общий. Следовательно, треугольники ABA_1 и CBC_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Тогда $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Угол B – общий для треугольников ABC и A_1BC_1. Следовательно, треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по второму признаку подобия треугольников. ◄

1. Сформулируйте второй признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте третий признак подобия треугольников.

Упражнения

489. На одной стороне угла A отложены отрезки AB и AD, а на другой – отрезки AC и AE. Подобны ли треугольники ABC и ADE, если $AB = 4$ см, $AD = 20$ см, $AC = 10$ см, $AE = 8$ см?

490. На сторонах AB и AC треугольника ABC (рис. 163) отметили соответственно точки D и E так, что $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Найдите отрезок DE, если $BC = 21$ см.

491. В треугольнике ABC известно, что $AB = 21$ см, $AC = 42$ см, $BC = 28$ см (рис. 164). На продолжениях отрезков AB и BC за точку B отложены

Рис. 162

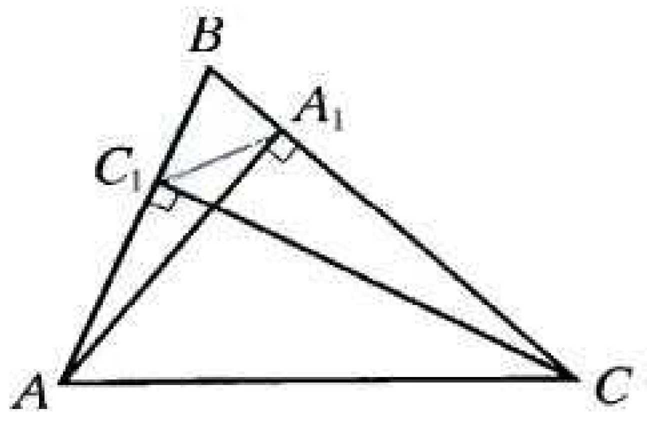


Рис. 163

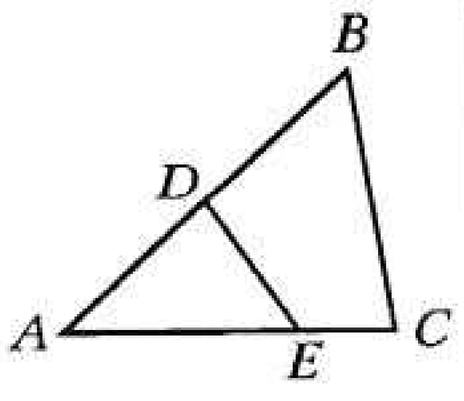
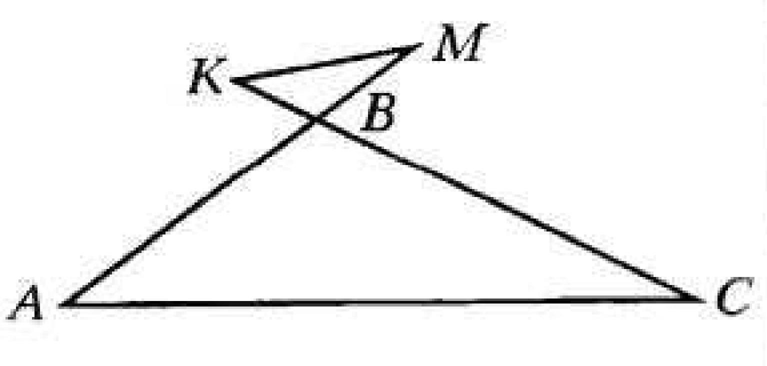


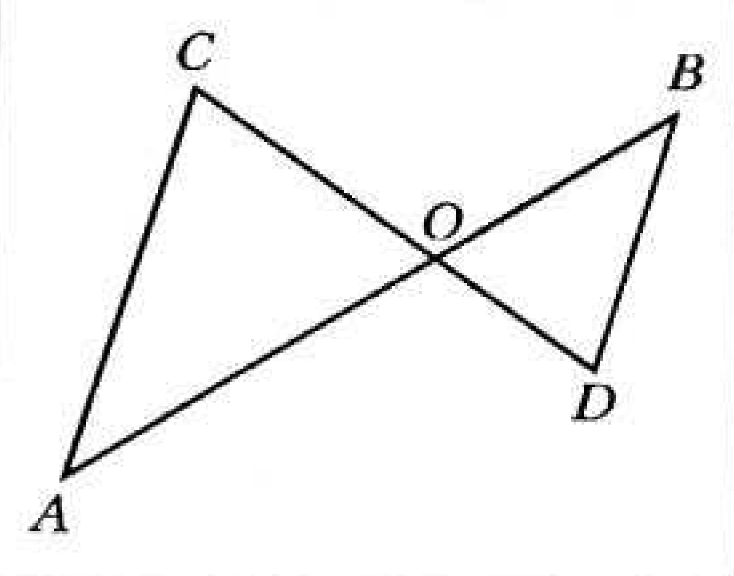
Рис. 164



соответственно отрезки BM и BK, $BM = 8$ см, $BK = 6$ см. Найдите отрезок KM.

492. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 165), $AO = 24$ см, $BO = 16$ см, $CO = 15$ см, $OD = 10$ см, $\angle ACO = 72°$. Найдите $\angle BDO$.

Рис. 165



493. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $CM = 15$ см, $CK = 12$ см. Найдите MK, если $AC = 20$ см, $BC = 25$ см, $AB = 30$ см.

494. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:
1) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см;
2) $AB = 1{,}3$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3{,}2$ см, $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 50$ см, $A_1C_1 = 60$ см?

495. Подобны ли два треугольника, если стороны одного относятся как $3 : 8 : 9$, а стороны другого равны 24 см, 9 см, 27 см?

496. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, каждая из сторон AB и AC составляет 0,6 сторон A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Найдите стороны BC и B_1C_1, если их сумма равна 48 см.

497. В треугольниках DEF и MKN известно, что $\angle E = \angle K$, а каждая из сторон DE и EF в 2,5 раза больше сторон MK и KN соответственно. Найдите стороны DF и MN, если их разность равна 30 см.

498. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Найдите DE, если $BC = 16$ см.

499. Из деревянных палочек изготовили три подобных разносторонних треугольника. В каждом из них бо́льшую сторону покрасили в синий цвет, а меньшую — в жёлтый. Из синих палочек составили один треугольник, а из жёлтых — второй. Будут ли эти треугольники подобны?

500. В треугольнике ABC известно, что $AC = a$, $AB = BC = b$, AM и CK — биссектрисы треугольника. Найдите отрезок MK.

501. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см. На стороне AC отметили точку D так, что $CD = 9$ см. Найдите отрезок BD.

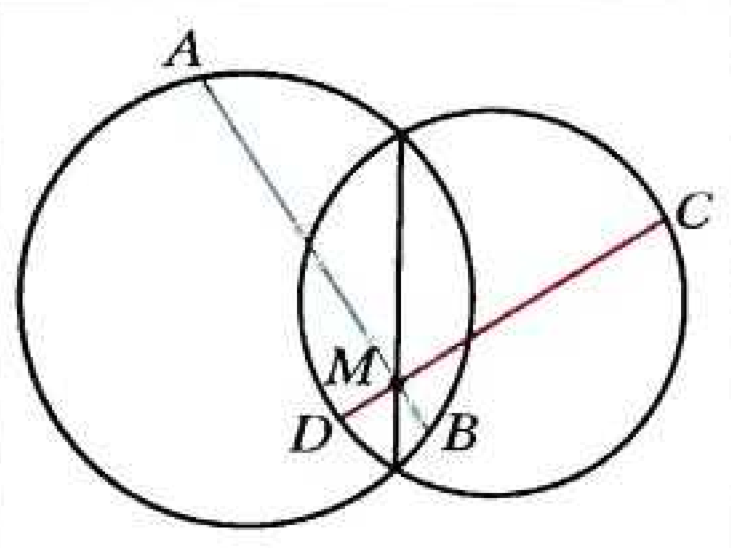
502. Из точки A проведены два луча AM и AN. На луче AM отмечены точки H и B, а на луче AN – точки C и D так, что $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Докажите, что точки H, B, C и D лежат на одной окружности.

503. На медиане BM треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle MKC = \angle BCM$. Докажите, что $\angle AKM = \angle BAM$.

504. Отрезки AB и CD пересекаются в точке M. Известно, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

505. На общей хорде двух пересекающихся окружностей отметили точку M и через неё провели хорды AB и CD (рис. 166). Докажите, что $\angle DAB = \angle BCD$.

Рис. 166



Упражнения для повторения

506. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $\angle BAD = \angle ADB$. Найдите стороны параллелограмма, если периметр треугольника BCD равен 32 см.

507. На диагонали BD квадрата $ABCD$ отметили точку E так, что $DE = AD$. Через точку E проведена прямая, которая перпендикулярна прямой BD и пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что $AF = FE = BE$.

508. В трапеции $ABCD$ известно, что $\angle B = 90°$, $\angle C = 150°$, $BC = 5$ см. Найдите сторону CD, если высота трапеции, проведённая из вершины C, разбивает данную трапецию на треугольник и квадрат.

Повторите содержание пункта 7 на с. 197 и пункта 17 на с. 201.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

509. На окружности отметили 999 точек синим карандашом и одну точку красным карандашом. Каких многоугольников с вершинами в отмеченных точках больше: тех, которые содержат красную точку, или тех, которые её не содержат?

Когда сделаны уроки

Прямая Эйлера

Точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника – это центр окружности, описанной около треугольника. Обозначим эту точку буквой O.

Точка пересечения биссектрис треугольника – это центр вписанной окружности. Обозначим эту точку буквой J.

Точку пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, называют **ортоцентром** треугольника. Обозначим эту точку буквой H.

Точку пересечения медиан треугольника называют **центроидом** треугольника. Обозначим эту точку буквой M.

Точки O, J, H, M называют **замечательными точками** треугольника. Использование такого эмоционального эпитета вполне обоснованно. Ведь эти точки обладают целым рядом красивых свойств. Разве не замечательно уже хотя бы то, что они существуют в любом треугольнике?

Рассмотрим одну из многих теорем о замечательных точках треугольника.

Теорема

В любом треугольнике центр описанной окружности, центроид и ортоцентр лежат на одной прямой (прямой Эйлера).

Доказательство

Для равнобедренного треугольника доказываемое утверждение очевидно.

Если данный треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), то его ортоцентр – это точка C, центр описанной окружности – середина гипотенузы AB. Тогда понятно, что все три точки, о которых идёт речь в теореме, принадлежат медиане, проведённой к гипотенузе.

Докажем теорему для остроугольного разностороннего треугольника.

Лемма

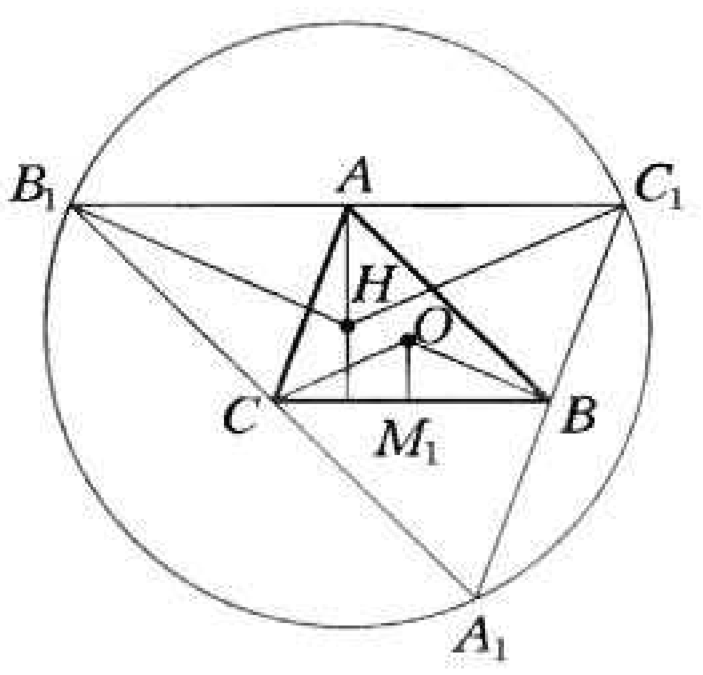
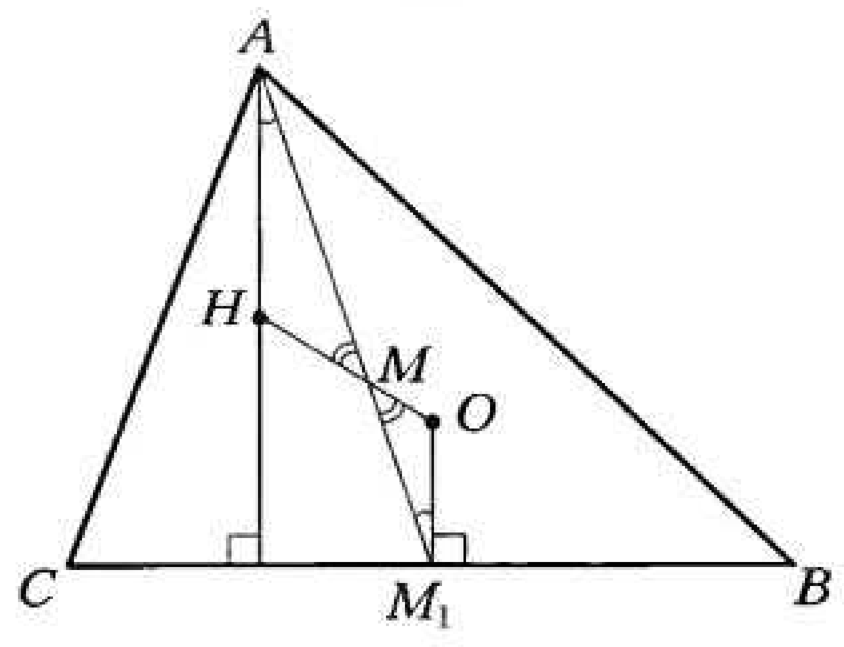
Если точка H — ортоцентр треугольника ABC, OM_1 — перпендикуляр, опущенный из центра O описанной окружности на сторону BC, то $AH = 2OM_1$ (рис. 167).

Доказательство

Выполним дополнительное построение, уже знакомое вам из решения ключевой задачи § 2: через каждую вершину треугольника ABC проведём прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (*см.* рис. 167). В указанной ключевой задаче было показано, что ортоцентр H треугольника ABC является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Для этой окружности угол B_1HC_1 является центральным, а угол $B_1A_1C_1$ – вписанным. Так как они опираются на одну и ту же дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Углы BAC и $B_1A_1C_1$ равны как противолежащие углы параллелограмма ABA_1C, поэтому $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$. Поскольку $B_1C_1 = 2BC$, то равнобедренные треугольники B_1HC_1 и COB подобны с коэффициентом подобия, равным 2. Поскольку отрезки AH и OM_1 – соответственные высоты подобных треугольников, то $AH = 2OM_1$.

Докажем теперь основную теорему.

Поскольку точка M_1 – середина стороны BC, то отрезок AM_1 – медиана треугольника ABC (рис. 168). Пусть M – точка пересечения отрезков AM_1 и HO. Так как $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Кроме того, углы AMH и M_1MO равны как вертикальные. Следовательно, треугольники HAM и OM_1M подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Значит, точка M делит медиану AM_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины A. Тогда точка M – центроид треугольника ABC.

Рис. 167	Рис. 168
	

Доказательство для случая тупоугольного треугольника аналогично. ◄

Обратим внимание на то, что мы не только установили факт принадлежности точек O, M, H одной прямой, но и доказали равенство $HM = 2MO$, которое является ещё одним свойством замечательных точек треугольника.

Леонард Эйлер (1707–1783)

Выдающийся математик, физик, механик, астроном.

Уроженец Швейцарии, приехал в Россию в 19 лет по приглашению Петербургской академии наук. Бо́льшую часть жизни провёл в России, здесь же создал большинство своих научных трудов.

С точки зрения математики XVIII век — это век Эйлера. Если до него достижения в области математики были разрознены и не всегда согласованны, то Эйлер впервые соединил анализ, алгебру, тригонометрию, теорию чисел и другие дисциплины в единую систему и добавил немало собственных открытий. Значительная часть математики преподаётся с тех пор «по Эйлеру».

Кроме математики, он глубоко изучал ботанику, медицину, химию, теорию музыки, множество европейских языков. Свои математические исследования Эйлер широко применял для решения практических проблем механики, баллистики, картографии, кораблестроения.

Двухтомная классическая монография «Универсальная арифметика» (которая издавалась также под названиями «Начала алгебры» и «Полный курс алгебры») была переведена на многие языки и переиздавалась около 30 раз (трижды — на русском языке). Все последующие учебники алгебры создавались под сильнейшим влиянием Эйлера.

Эйлер воспитал первых российских математиков, ставших членами Петербургской академии наук.

Упражнения

1. Даны две точки, лежащие в одной полуплоскости относительно данной прямой. Постройте треугольник, одна из сторон которого лежит на данной прямой, а центр описанной окружности и ортоцентр являются двумя данными точками.

2. Постройте треугольник ABC по трём данным точкам: вершине A, ортоцентру H и центру O описанной окружности.

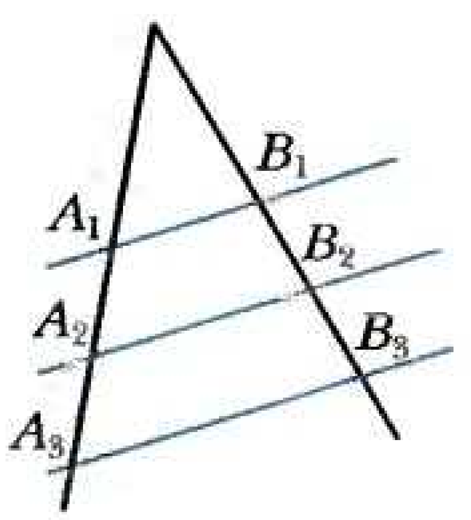
3. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC перпендикулярна прямой Эйлера этого треугольника. Докажите, что $\angle A = 60^\circ$.
Указание. Докажите, что $HA = OA$.

Задание № 2 в тестовой форме «Проверьте себя»

1. На рисунке 169 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = \frac{1}{2}A_1A_3$. Отсюда следует, что

А) $A_1A_2 = B_1B_2$ В) $A_1A_3 = B_1B_3$
Б) $B_1B_3 = 2B_2B_3$ Г) $A_1A_2 = B_2B_3$

Рис. 169



2. Если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, то какое из данных равенств является верным?

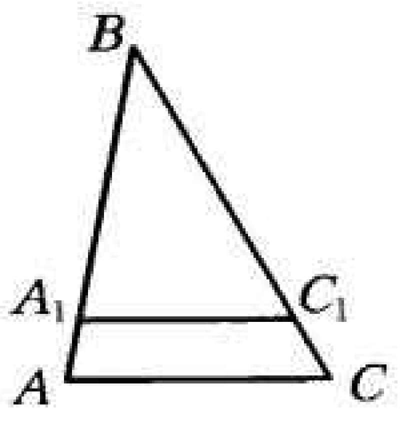
А) $AM : MB_1 = BM : MA_1$

Б) $MA_1 = \frac{1}{3}MB$

В) $MA_1 = \frac{1}{2}AM$

Г) $MB_1 = \frac{1}{2}BB_1$

Рис. 170



3. На рисунке 170 $A_1C_1 \parallel AC$. Тогда

А) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$ В) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$

Б) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$ Г) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 9$ см. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису BB_1, считая от вершины B?

А) 2 : 3 Б) 2 : 1 В) 4 : 3 Г) 3 : 4

5. Через точку M стороны BC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная стороне CD. Эта прямая пересекает отрезки BD и AD в точках K и F соответственно. Известно, что $BM : FD = 2 : 1$. Чему равно отношение $KD : BK$?

А) 2 : 1 Б) 1 : 2 В) 1 : 3 Г) 4 : 1

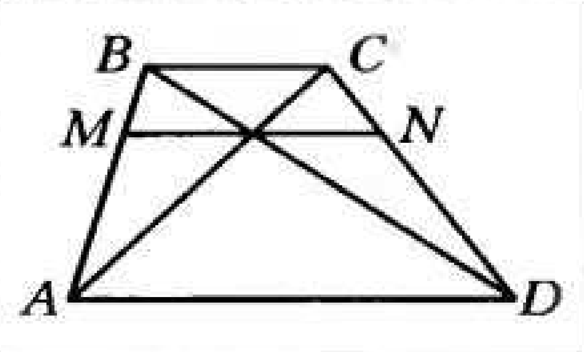
6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 14$ см, $BC = 21$ см. На стороне AB на расстоянии 4 см от вершины A отмечена точка D, через которую проведена прямая, параллельная стороне AC. Найдите отрезки, на которые эта прямая делит сторону BC.

А) 12 см, 9 см В) 15 см, 6 см
Б) 18 см, 3 см Г) 14 см, 7 см

7. Отрезок MN, проведённый через точку пересечения диагоналей неравнобокой трапеции $ABCD$, параллелен её основаниям (рис. 171). Сколько пар подобных треугольников изображено на рисунке?

А) 4 Б) 6 В) 3 Г) 5

Рис. 171

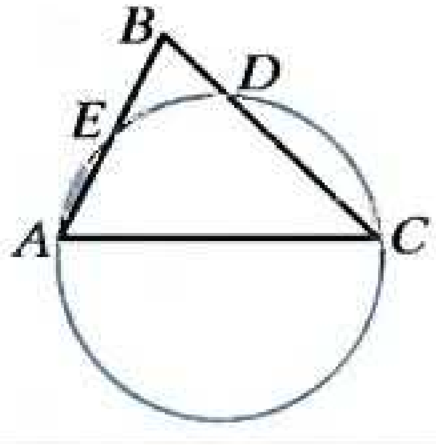


8. Через вершины A и C неравнобедренного треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает стороны BA и BC в точках E и D соответственно (рис. 172). Какое из данных равенств является верным?

А) $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$ В) $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC}$

Б) $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$ Г) $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{AC}$

Рис. 172



9. Хорда AB пересекает хорду CD в её середине и делится точкой пересечения на отрезки, равные 4 см и 25 см. Чему равна хорда CD?

А) 10 см Б) 5 см В) 100 см Г) 20 см

10. В треугольнике ABC известно, что $AB = 10$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. На стороне AC отмечена точка D такая, что $AD = 6$ см. Чему равен отрезок BD?

А) 5 см Б) 4 см В) 6 см Г) 7 см

Итоги главы 2

Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Отношение двух отрезков

Отношением двух отрезков называют отношение их длин, выраженных в одних и тех же единицах измерения.

Теорема о пропорциональных отрезках

Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

Свойство медиан треугольника

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника.

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

Подобные треугольники

Два треугольника называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника.

Лемма о подобных треугольниках

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Первый признак подобия треугольников: по двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников: по трём сторонам

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Глава 3. Решение прямоугольных треугольников

В этой главе вы познакомитесь со знаменитой теоремой Пифагора. Вы научитесь по известным сторонам и углам прямоугольного треугольника находить его неизвестные стороны и углы.

§ 15. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

На рисунке 173 отрезок CD – высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$).

Отрезки AD и DB называют **проекциями** катетов AC и CB соответственно на гипотенузу.

Лемма

Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Докажите лемму самостоятельно.

Теорема 15.1

Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Доказательство

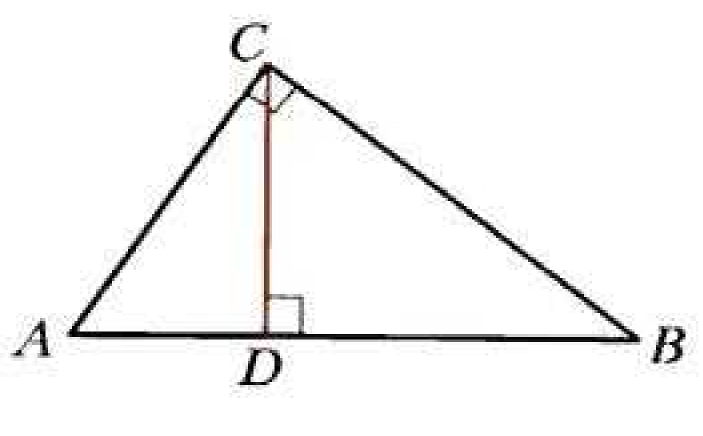
На рисунке 173 отрезок CD – высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Докажем, что:

$$CD^2 = AD \cdot DB,\ AC^2 = AB \cdot AD,\ BC^2 = AB \cdot DB.$$

Так как $\Delta CBD \sim \Delta ACD$, то $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Отсюда $CD^2 = AD \cdot DB$.

Так как $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, то $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Отсюда $AC^2 = AB \cdot AD$.

Рис. 173



Так как $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, то $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. Отсюда $BC^2 = AB \cdot DB$. ◄

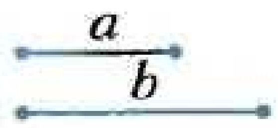
Если длины отрезков на рисунке 173 обозначить так: $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$, $DB = a_c$, то доказанные соотношения принимают вид:

$$h_c^2 = a_c b_c,\ a^2 = a_c c,\ b^2 = b_c c$$

Эти равенства называют **метрическими соотношениями в прямоугольном треугольнике**.

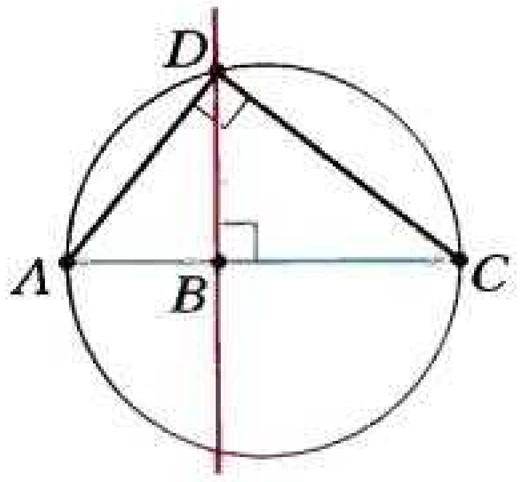
Задача. Даны два отрезка, длины которых равны a и b (рис. 174). Постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt{ab}$.

Рис. 174



Решение. Рассмотрим треугольник ADC ($\angle ADC = 90°$), в котором отрезок DB является высотой (рис. 175). Имеем: $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$. Отсюда если $AB = a$, $BC = b$, то $DB = \sqrt{ab}$.

Рис. 175



Проведённый анализ показывает, как провести построение.

На произвольной прямой отметим точку A и отложим последовательно отрезки AB и BC так, что $AB = a$, $BC = b$. Построим окружность с диаметром AC. Через точку B проведём прямую, перпендикулярную прямой AC (см. рис. 175). Пусть D – одна из точек пересечения прямой и окружности.

Докажем, что отрезок DB – искомый. Действительно, $\angle ADC = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр AC. Тогда по теореме 15.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, т. е. $DB = \sqrt{ab}$. ◄

1. Какой формулой связаны высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, и проекции катетов на гипотенузу?
2. Какой формулой связаны катет, гипотенуза и проекция этого катета на гипотенузу?

Упражнения

510. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки длиной 2 см и 18 см.

511. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а его проекция на гипотенузу – 4 см. Найдите гипотенузу.

512. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит её на отрезки длиной 5 см и 20 см. Найдите катеты треугольника.

513. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна 48 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу — 36 см. Найдите стороны данного треугольника.

514. Найдите катеты прямоугольного треугольника, высота которого делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 3 см меньше этой высоты, а другой — на 4 см больше высоты.

515. Найдите меньший катет прямоугольного треугольника и его высоту, проведённую к гипотенузе, если больший катет меньше гипотенузы на 10 см и больше своей проекции на гипотенузу на 8 см.

516. Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, равен 2 см и делит её на отрезки, относящиеся как 1 : 4. Найдите диагонали ромба.

517. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на её диаметр, делит его на два отрезка, один из которых равен 4 см. Найдите радиус окружности, если длина перпендикуляра равна 10 см.

518. Найдите периметр равнобокой трапеции, основания которой равны 7 см и 25 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

519. Центр окружности, описанной около равнобокой трапеции, принадлежит её большему основанию. Найдите радиус этой окружности, если диагональ трапеции равна 20 см, а проекция диагонали на большее основание — 16 см.

520. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, которая равна 12 см. Найдите среднюю линию трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 10 см.

521. Найдите высоту равнобокой трапеции, если её диагональ перпендикулярна боковой стороне, а разность квадратов оснований равна 25 см^2.

522. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бо́льшую боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см. Найдите периметр трапеции.

523. В равнобокую трапецию вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 27 см. Найдите высоту трапеции.

524. Постройте отрезок длиной x, если $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, где a и b — длины данных отрезков.

8 — 748

Упражнения для повторения

525. Периметр параллелограмма больше одной из сторон на 35 см и больше другой стороны на 28 см. Найдите стороны параллелограмма.

526. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки M, N, K и E так, что четырёхугольник $MNKE$ является прямоугольником, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника $MNKE$, если диагональ квадрата $ABCD$ равна 7 см.

527. В окружность вписана трапеция, диагональ которой делит угол при большем основании пополам. Найдите дуги, на которые делят окружность вершины трапеции, если один из её углов равен 74°.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

528. У вписанного в окружность многоугольника выбрали вершину и провели все диагонали, которым эта вершина принадлежит. Докажите, что среди образовавшихся треугольников не более чем один является остроугольным.

§ 16. Теорема Пифагора

Теорема 16.1
(теорема Пифагора)

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство

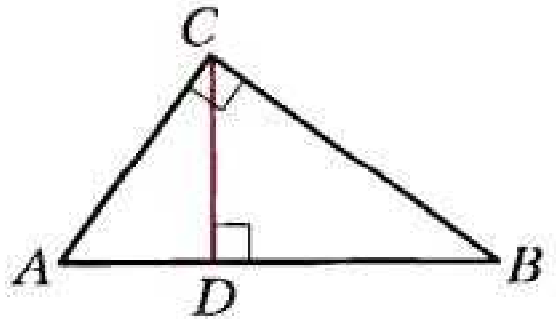
На рисунке 176 изображён прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Докажем, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Проведём высоту CD. Применив теорему 15.1 для катетов AC и BC, получаем: $AC^2 = AB \cdot AD$ и $BC^2 = AB \cdot DB$.

Сложив почленно эти равенства, получим $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB$.

Далее, $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$, $AC^2 + BC^2 = AB^2$. ◄

Рис. 176



Если в прямоугольном треугольнике длины катетов равны a и b, а длина гипотенузы равна c, то теорему Пифагора можно выразить следующим равенством:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Теорема Пифагора даёт возможность по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2};\ a = \sqrt{c^2 - b^2};\ b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

Из равенства $c^2 = a^2 + b^2$ также следует, что $c^2 > a^2$ и $c^2 > b^2$, отсюда $c > a$ и $c > b$, т. е. ***гипотенуза больше любого из катетов***. Другим способом этот факт был установлен в курсе геометрии 7 класса.

Пифагор (VI в. до н. э.)

Вы изучили знаменитую теорему, которая носит имя выдающегося древнегреческого учёного Пифагора.

Исследования древних текстов свидетельствуют о том, что утверждение этой теоремы было известно задолго до Пифагора. Почему же её приписывают Пифагору? Скорее всего потому, что именно Пифагор нашёл доказательство этого утверждения.

О жизни Пифагора мало что известно достоверно. Он родился на греческом острове Самос. По преданиям, он много путешествовал, приобретая знания и мудрость.

Поселившись в греческой колонии Кротон (на юге Италии), он окружил себя преданными учениками и единомышленниками. Так возник пифагорейский союз (или кротонское братство). Влияние этого союза было таким сильным, что даже через столетия после смерти Пифагора многие выдающиеся математики Древнего мира называли себя пифагорейцами.

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Запишите теорему Пифагора, если катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза равна c.
3. Как по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону?
4. Какая из сторон прямоугольного треугольника является наибольшей?

Упражнения

529. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: 1) 3 см и 4 см; 2) 6 см и 9 см.

530. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и второй катет соответственно равны: 1) 15 см и 12 см; 2) 7 см и $\sqrt{13}$ см.

531. Пусть a и b – катеты прямоугольного треугольника, c – его гипотенуза. Найдите неизвестную сторону треугольника, если: 1) $a = 5$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 1$ см, $c = 2$ см; 3) $b = 3$ см, $c = \sqrt{90}$ см.

532. Стороны прямоугольника равны 9 см и 40 см. Чему равна его диагональ?

533. Сторона прямоугольника равна 7 см, а диагональ – 25 см. Найдите соседнюю к данной сторону прямоугольника.

534. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 29 см, а высота, проведённая к основанию, – 21 см. Чему равно основание треугольника?

535. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 35 см, а его основание – 24 см. Чему равна боковая сторона треугольника?

536. В окружности, радиус которой равен 10 см, проведена хорда длиной 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до данной хорды.

537. Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 24 см и 32 см.

538. Сторона ромба равна 26 см, а одна из диагоналей – 48 см. Найдите другую диагональ ромба.

539. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 21 см, а второй катет на 7 см меньше гипотенузы. Найдите периметр треугольника.

540. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26 см, а катеты относятся как 5 : 12. Найдите катеты этого треугольника.

541. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведённая к нему, – 5 см. Найдите гипотенузу треугольника.

542. В треугольнике ABC известно, что $BC = 20$ см, высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 5$ см и $CD = 16$ см. Найдите сторону AB.

543. В треугольнике ABC известно, что $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, $\angle C$ – тупой, высота AD равна 8 см. Найдите сторону AC.

544. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной a.

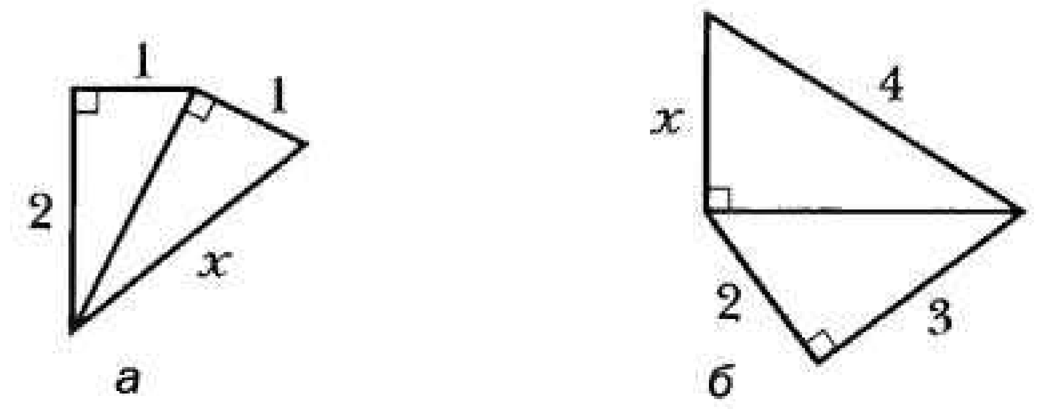
545. Найдите диагональ квадрата со стороной a.

546. Найдите сторону равностороннего треугольника, высота которого равна h.

547. Найдите катеты прямоугольного равнобедренного треугольника, гипотенуза которого равна c.

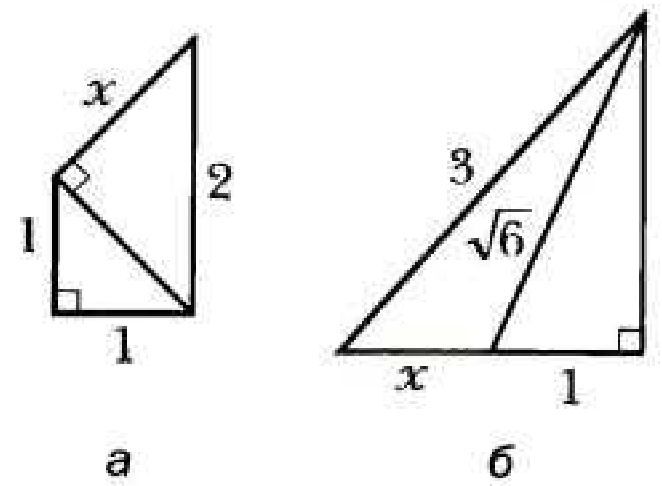
548. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 177 (размеры даны в сантиметрах).

Рис. 177



549. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 178 (размеры даны в сантиметрах).

Рис. 178



550. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к боковой стороне, равна 8 см. Она делит боковую сторону на два отрезка, один из которых, прилежащий к вершине равнобедренного треугольника, равен 6 см. Найдите основание треугольника.

551. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, делит её на отрезки длиной 4 см и 16 см, считая от вершины угла при основании. Найдите основание равнобедренного треугольника.

552. Основание равнобедренного тупоугольного треугольника равно 24 см, а радиус окружности, описанной около него, – 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.

553. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, равна 8 см, а радиус окружности, описанной около него, – 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

554. Основание равнобедренного треугольника на 2 см больше боковой стороны. Найдите стороны треугольника, если высота, проведённая к основанию, равна 8 см.

555. Периметр равнобедренного треугольника равен 90 см, а высота, проведённая к основанию, – 15 см. Найдите стороны треугольника.

556. Стороны тупоугольного треугольника равны 29 см, 25 см и 6 см. Найдите высоту треугольника, проведённую к меньшей стороне.

557. Стороны треугольника равны 36 см, 29 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, проведённую к большей стороне.

558. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых относятся как 5 : 6, а проекции этих наклонных на прямую равны 7 см и 18 см. Найдите расстояние от данной точки до этой прямой.

559. Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 15 см и 27 см. Сумма длин проекций этих наклонных на прямую равна 24 см. Найдите проекцию каждой наклонной.

560. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из его катетов на отрезки 2 см и 6 см. Найдите стороны треугольника.

561. Найдите стороны параллелограмма, диагонали которого равны 16 см и 20 см, если одна из диагоналей перпендикулярна его стороне.

562. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см.

563. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если биссектриса острого угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 24 см и 51 см.

564. (Старинная арабская задача.) На противоположных берегах реки растут одна напротив другой две пальмы. Высота одной из них равна 30 локтей, другой — 20 локтей, а расстояние между основаниями пальм — 50 локтей. На вершине каждой пальмы сидит птица. Вдруг обе птицы увидели рыбу, которая показалась на поверхности воды между пальмами. Они взлетели с пальм одновременно и, двигаясь с одинаковой скоростью, одновременно схватили рыбу. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

565. Основания равнобокой трапеции равны 12 см и 20 см, а диагональ является биссектрисой тупого угла трапеции. Найдите эту диагональ.

566. Основания прямоугольной трапеции равны 18 см и 12 см, а диагональ является биссектрисой острого угла трапеции. Найдите эту диагональ.

567. В окружности по разные стороны от её центра проведены две параллельные хорды длиной 16 см и 32 см. Расстояние между хордами равно 16 см. Найдите радиус окружности.

568. В окружности по одну сторону от её центра проведены две параллельные хорды длиной 48 см и 24 см. Расстояние между хордами равно 12 см. Найдите радиус окружности.

569. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 12 см, а расстояние от вершины равнобедренного треугольника до центра окружности — 20 см. Найдите периметр данного треугольника.

570. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит её большее основание на отрезки длиной 20 см и 25 см, считая от вершины прямого угла. Вычислите периметр трапеции.

571. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит её меньшее основание на отрезки длиной 6 см и 3 см, считая от вершины прямого угла. Вычислите периметр трапеции.

572. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 24 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины меньшего острого угла.

573. Медианы AM и CK треугольника ABC перпендикулярны. Найдите стороны треугольника, если $AM = 9$ см и $CK = 12$ см.

574. В треугольнике ABC медианы BM и CK перпендикулярны и пересекаются в точке O. Найдите отрезок AO, если $BM = 36$ см и $CK = 15$ см.

575. (Задача Бхаскары*.)

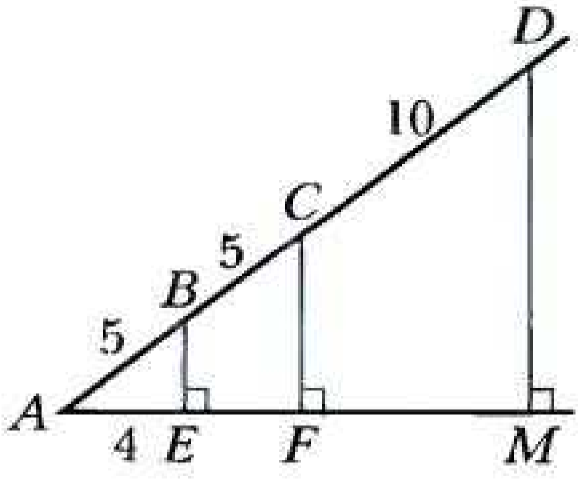
Над озером тихим, с полфута высотой
Высится лотоса цветок.
И ветер порывистый
Отнёс его в сторону. Нет
больше цветка над водой.
Нашёл его рыбак
В двух футах от места, где он рос.
Итак, предлагаю вопрос:
Как глубока здесь озера вода?

Готовимся к изучению новой темы

576. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC = 5$ см, $AC = 12$ см. Найдите отношение:

1) катета, прилежащего к углу A, и гипотенузы;
2) катета, противолежащего углу A, и гипотенузы;
3) катета, прилежащего к углу B, и гипотенузы;
4) катета, прилежащего к углу B, и катета, противолежащего этому углу.

Рис. 179



577. На одной стороне угла A отметили точки B, C и D так, что $AB = BC = 5$ см, $CD = 10$ см (рис. 179). Из точек B, C и D опущены перпендикуляры BE, CF и DM на другую сторону угла A, причём $AE =$

* Бхáскара (1114–1185) — индийский математик и астроном.

= 4 см. Найдите отношение катета, прилежащего к углу A, и гипотенузы:

1) в треугольнике AEB;
2) в треугольнике AFC;
3) в треугольнике AMD.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

578. В квадрате со стороной 1 м произвольным образом отметили 51 точку. Докажите, что среди этих точек существуют три, которые можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

§ 17. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

На рисунке 180 изображён прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Напомним, что катет BC называют **противолежащим** углу A, а катет AC – **прилежащим** к этому углу.

Определение

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначают так: $\sin A$ (читают: «синус A»). Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Для прямоугольного треугольника, изображённого на рисунке 181: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), в котором $AC = BC = a$ (рис. 182).

Рис. 180

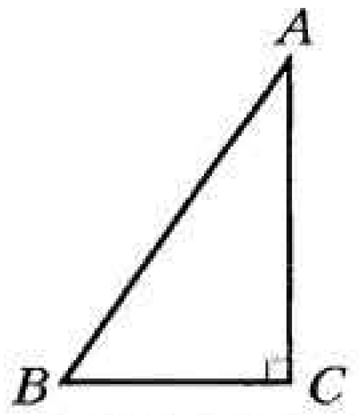


Рис. 181

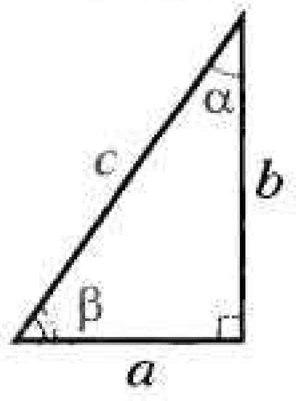
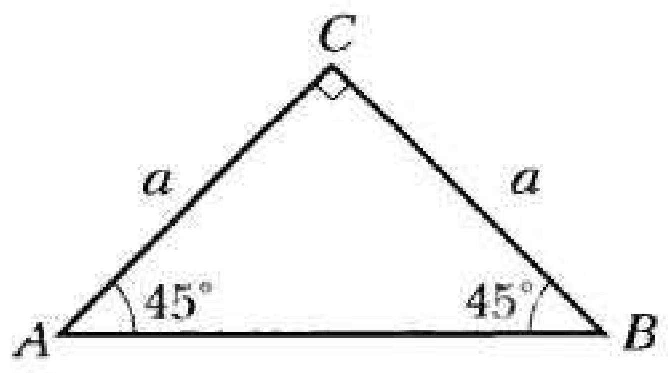


Рис. 182



Имеем: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

По определению $\sin A = \frac{BC}{AB}$, отсюда $\sin A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Видим, что синус острого угла прямоугольного равнобедренного треугольника не зависит от размеров треугольника, так как полученное значение синуса одинаково для всех значений a. Поскольку $\angle A = 45^\circ$, то $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Эту запись не связывают с конкретным прямоугольным равнобедренным треугольником.

Вообще, *если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны.*

Действительно, эти прямоугольные треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников. Поэтому отношение катета к гипотенузе одного треугольника равно отношению соответственного катета к гипотенузе другого треугольника.

Например, запись $\sin 17^\circ$ можно отнести ко всем углам, градусные меры которых равны 17°. Значение синуса этого угла можно вычислить один раз, выбрав произвольный прямоугольный треугольник с острым углом 17°.

Следовательно, ***синус острого угла зависит только от величины этого угла.***

Определение

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначают так: $\cos A$ (читают: «косинус A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (*см.* рис. 180) можно записать:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Отметим, что поскольку катет прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы, то *синус и косинус острого угла меньше 1.*

Определение

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Тангенс угла A обозначают так: $\operatorname{tg} A$ (читают: «тангенс A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (*см.* рис. 180) можно записать:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

Определение

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

Котангенс угла A обозначают так: $\operatorname{ctg} A$ (читают: «котангенс A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (*см.* рис. 180) можно записать:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}, \ \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}.$$

Для прямоугольного треугольника, изображённого на рисунке 181:

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Как было установлено, синус острого угла зависит только от величины угла. Рассуждая аналогично, можно прийти к следующему выводу: ***косинус, тангенс и котангенс острого угла зависят только от величины этого угла***.

Вообще, каждому острому углу α соответствует единственное число, являющееся значением синуса (косинуса, тангенса, котангенса) этого угла. Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) острого угла от величины этого угла является функциональной. Функцию, соответствующую этой зависимости, называют **тригонометрической**. Так, $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\alpha$ — тригонометрические функции, аргументами которых являются острые углы.

С древних времён люди составляли таблицы приближённых значений тригонометрических функций с некоторым шагом, один раз вычисляя значения тригонометрических функций для конкретного аргумента. Затем эти таблицы широко использовались во многих областях науки и техники.

В наше время значения тригонометрических функций острых углов удобно находить с помощью микрокалькулятора.

Тангенс и котангенс острого угла можно выразить через синус и косинус этого же угла. Рассмотрим прямоугольный треугольник (*см.* рис. 181). Запишем: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Заметим, что тангенс и котангенс одного и того же острого угла являются взаимно обратными числами, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. Обе части этого равенства разделим на c^2: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, получим

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Принято записывать $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$. Отсюда

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Эту формулу называют **основным тригонометрическим тождеством**.

Отметим, что $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Так как $\beta = 90^\circ - \alpha$, то

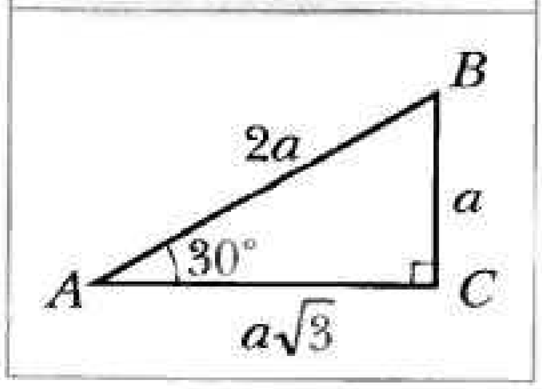
$$\begin{array}{ll} \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha & \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \end{array}$$

Мы уже знаем, что $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдём теперь $\cos 45^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$ и $\operatorname{ctg} 45^\circ$.

$$\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,\ \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1.$$

Рис. 183



Найдём синус, косинус, тангенс и котангенс углов 30° и 60°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ (рис. 183).

Пусть $BC = a$. Тогда по свойству катета, лежащего против угла 30°, получаем, что $AB = 2a$. Из теоремы Пифагора следует, что $AC^2 = AB^2 - BC^2$.

Получаем $AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$; $AC = a\sqrt{3}$. Отсюда находим:

$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\mathrm{tg}\, 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{ctg}\, 30^\circ = \frac{1}{\mathrm{tg}\, 30^\circ} = \sqrt{3}$.

Так как $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, то получаем:

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\mathrm{tg}\, 60^\circ = \mathrm{ctg}\, 30^\circ = \sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\, 60^\circ = \mathrm{tg}\, 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 45° и 60° полезно запомнить.

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. Что называют синусом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Что называют косинусом острого угла прямоугольного треугольника?
3. Что называют тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
4. Что называют котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
5. От чего зависят синус, косинус, тангенс и котангенс угла?
6. Как связаны между собой $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
7. Как связаны между собой $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
8. Как связаны между собой $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$?
9. Как связаны между собой $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
10. Чему равен $\sin(90^\circ - \alpha)$? $\cos(90^\circ - \alpha)$? $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$? $\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha)$?
11. Чему равен $\sin 45^\circ$? $\cos 45^\circ$? $\mathrm{tg}\, 45^\circ$? $\mathrm{ctg}\, 45^\circ$?
12. Чему равен $\sin 30^\circ$? $\cos 30^\circ$? $\mathrm{tg}\, 30^\circ$? $\mathrm{ctg}\, 30^\circ$?
13. Чему равен $\sin 60^\circ$? $\cos 60^\circ$? $\mathrm{tg}\, 60^\circ$? $\mathrm{ctg}\, 60^\circ$?

Практические задания

579. Постройте угол:

1) тангенс которого равен $\frac{4}{5}$;

2) синус которого равен $\frac{2}{3}$.

580. Постройте угол:

1) косинус которого равен $\frac{1}{4}$;

2) котангенс которого равен $\frac{1}{2}$.

Упражнения

581. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 8 см и 10 см. Найдите:

1) синус угла, противолежащего меньшему катету;
2) косинус угла, прилежащего к большему катету;
3) тангенс угла, противолежащего меньшему катету;
4) котангенс угла, прилежащего к большему катету.

582. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 2 см. Найдите:

1) тангенс угла, прилежащего к большему катету;
2) синус угла, противолежащего меньшему катету;
3) косинус угла, прилежащего к большему катету;
4) котангенс угла, противолежащего большему катету.

583. Найдите значение выражения:

1) $\cos^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ$; 2) $2\cos^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ + \sin 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$.

584. Найдите значение выражения:

1) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ$; 2) $3\operatorname{tg}^2 30^\circ + 4\operatorname{tg} 45^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

585. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $BC = 77$ см, $AB = 125$ см. Найдите синусы острых углов треугольника.

586. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $BC = 41$ см, $AC = 20$ см. Найдите косинусы острых углов треугольника.

587. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

588. Найдите $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$, если $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

589. Синус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс второго острого угла этого треугольника.

590. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а боковая сторона – 13 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между боковой стороной треугольника и высотой, проведённой к его основанию.

591. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а высота, проведённая к основанию, – 8 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла при основании треугольника.

592. Найдите углы ромба, диагонали которого равны 4 см и $4\sqrt{3}$ см.

593. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами, длины которых равны $\sqrt{3}$ см и 3 см.

594. В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD = 9$ см, $BC = 10$ см, $AD = 14$ см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла A трапеции.

595. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см. Найдите углы трапеции.

596. Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника являются взаимно обратными числами.

597. Докажите тождество:

1) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$; 2) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.

598. Найдите значение выражения:

1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$; 2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

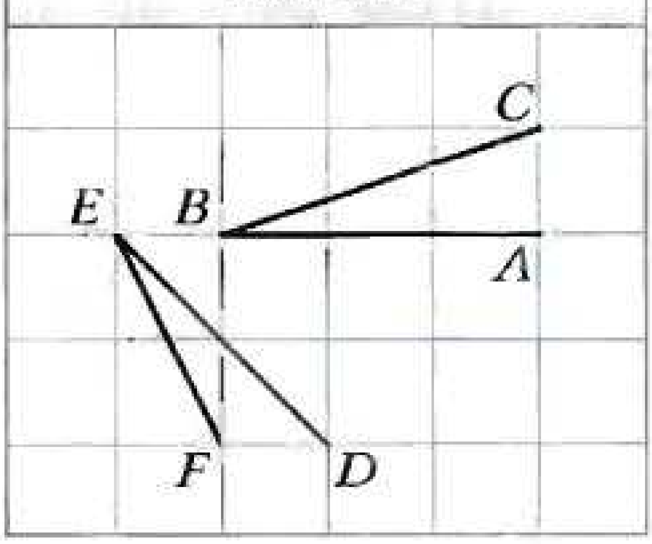
599. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 см и 40 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между медианой и высотой, проведёнными к гипотенузе.

600. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, BD и AM – высоты треугольника, $BD : AM = 3 : 1$. Найдите $\cos C$.

601. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, BD и CK – высоты треугольника, $\cos A = \dfrac{3}{7}$. Найдите отношение $CK : BD$.

602. Докажите, что углы ABC и DEF, изображённые на рисунке 184, равны.

Рис. 184



Упражнения для повторения

603. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, $AB = 6$ см. Найдите радиус окружности, которая проходит через точки A, B и M.

604. Хорды AB и BC окружности перпендикулярны, а расстояние между их серединами равно 12 см. Найдите радиус окружности.

605. В треугольнике ABC известно, что BK – высота, AM – биссектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. Из точки M опущен перпендикуляр MD на сторону AC. Найдите отрезок MD.

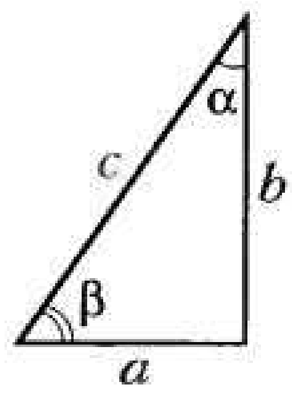
Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

606. Даны два круга, которые не имеют общих точек. Существует ли точка, которая не принадлежит ни одному из кругов, такая, что любая прямая, проходящая через эту точку, пересекает хотя бы один из этих кругов?

§ 18. Решение прямоугольных треугольников

На рисунке 185 изображён прямоугольный треугольник с острыми углами α и β, катеты которого равны a и b, а гипотенуза равна c.

Рис. 185



По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Отсюда $a = c\sin\alpha$, $b = c\sin\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету***.

По определению косинуса острого угла прямоугольного треугольника: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Отсюда $b = c\cos\alpha$, $a = c\cos\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету***.

По определению тангенса острого угла прямоугольного треугольника: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Отсюда $a = b\operatorname{tg}\alpha$, $b = a\operatorname{tg}\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению другого катета на тангенс угла, противолежащего первому катету***.

По определению котангенса острого угла прямоугольного треугольника: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$. Отсюда $b = a\operatorname{ctg}\alpha$, $a = b\operatorname{ctg}\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению другого катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.***

Из равенств $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ получаем: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ и $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Следовательно, ***гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла;***

гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.

Решить прямоугольный треугольник – значит найти его стороны и углы по известным сторонам и углам.

Задача 1. Решите прямоугольный треугольник по катету и острому углу: $a = 14$ см, $\alpha = 38°$. (Значения тригонометрических функций найдите с помощью микрокалькулятора и округлите их до сотых. Значения длин сторон округлите до десятых.)

Решение. Имеем:

$\beta = 90° - \alpha$, $\beta = 90° - 38° = 52°$;

$b = a\,\mathrm{tg}\,\beta$, $b = 14\,\mathrm{tg}\,52° \approx 14 \cdot 1{,}28 \approx 17{,}9$ (см);

$c = \frac{a}{\sin\alpha}$, $c = \frac{14}{\sin 38°} \approx \frac{14}{0{,}62} \approx 22{,}6$ (см).

Ответ: $c \approx 22{,}6$ см, $b \approx 17{,}9$ см, $\beta = 52°$. ◄

Отметим, что эту задачу можно решить и другим способом: например, найти гипотенузу, используя теорему Пифагора.

Задача 2. Решите прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе: $a = 26$ см, $c = 34$ см.

Решение. Имеем: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\alpha = \frac{26}{34} = 0{,}7647...$.

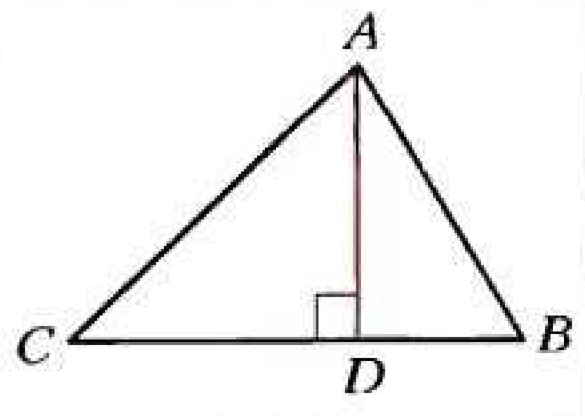
С помощью микрокалькулятора вычисляем угол α: $\alpha \approx 50°$.

Тогда $\beta \approx 40°$.

$b = c\sin\beta$, $b = 34\sin 40° \approx 34 \cdot 0{,}643 = 21{,}862 \approx 21{,}9$ (см).

Ответ: $b \approx 21{,}9$ см, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$. ◄

Рис. 186



Задача 3. Высота AD треугольника ABC (рис. 186) делит его сторону BC на отрезки BD и CD такие, что $BD = 2\sqrt{3}$ см, $CD = 8$ см. Найдите стороны AB и AC, если $\angle B = 60°$.

Решение. В треугольнике ADB ($\angle ADB = 90°$):

$AD = BD\,\mathrm{tg}\,B$, $AD = 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см);

$AB = \dfrac{BD}{\cos B}$, $AB = \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos 60^\circ} = 2\sqrt{3} : \dfrac{1}{2} = 4\sqrt{3}$ (см).

В треугольнике ADC ($\angle ADC = 90^\circ$):

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$, $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

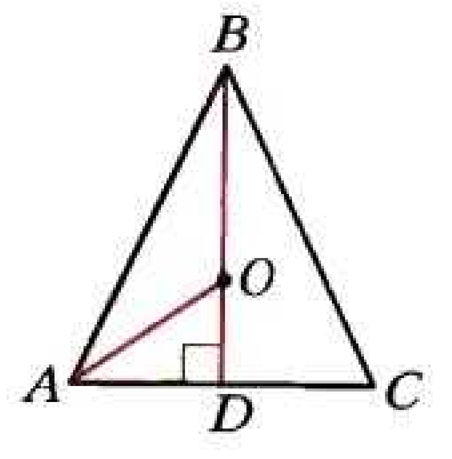
Ответ: $4\sqrt{3}$ см, 10 см. ◄

Задача 4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, угол при основании равен α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение. В треугольнике ABC (рис. 187) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Проведём высоту BD.

В треугольнике ADB ($\angle ADB = 90^\circ$) $AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha$.

Рис. 187



Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Следовательно, точка O принадлежит высоте BD и биссектрисе AO угла BAC. Так как $OD \perp AC$, то вписанная окружность касается стороны AC в точке D. Следовательно, OD – радиус вписанной окружности. Поскольку AO – биссектриса угла BAD, то $\angle OAD = \dfrac{1}{2}\angle BAD = \dfrac{\alpha}{2}$.

В треугольнике ADO ($\angle ADO = 90^\circ$): $OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = b \cos\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Ответ: $b \cos\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. ◄

1. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и угол, противолежащий этому катету?
2. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и угол, прилежащий к этому катету?
3. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны второй катет и угол, противолежащий искомому катету?
4. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны второй катет и угол, прилежащий к искомому катету?
5. Как можно найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны катет и противолежащий этому катету угол?
6. Как можно найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны катет и прилежащий к этому катету угол?

Упражнения

607. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$. Найдите:

1) BC, если $AB = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) AC, если $AB = 21$ см, $\cos A = 0{,}4$;
3) AC, если $BC = 4$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$;
4) AB, если $BC = 14$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;
5) AB, если $AC = 3{,}2$ см, $\sin B = 0{,}16$;
6) BC, если $AC = 2{,}3$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

608. В треугольнике DEF известно, что $\angle E = 90^\circ$. Найдите:

1) DE, если $DF = 18$ см, $\cos D = \frac{2}{9}$;
2) DF, если $EF = 3{,}5$ см, $\cos F = 0{,}7$;
3) EF, если $DE = 2{,}4$ см, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

609. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 17 см, а синус одного из острых углов равен $\frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника.

610. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а косинус одного из острых углов равен 0,8. Найдите катеты треугольника.

611. Катет прямоугольного треугольника равен 48 см, а тангенс противолежащего угла равен $3\frac{3}{7}$. Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.

612. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 12 см, а тангенс прилежащего угла — 0,75. Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.

613. Решите прямоугольный треугольник:

1) по гипотенузе и острому углу: $c = 28$ см, $\alpha = 48^\circ$;
2) по катету и острому углу: $a = 56$ см, $\beta = 74^\circ$;
3) по катету и гипотенузе: $a = 5$ см, $c = 9$ см;
4) по двум катетам: $a = 3$ см, $b = 7$ см.

614. Решите прямоугольный треугольник:

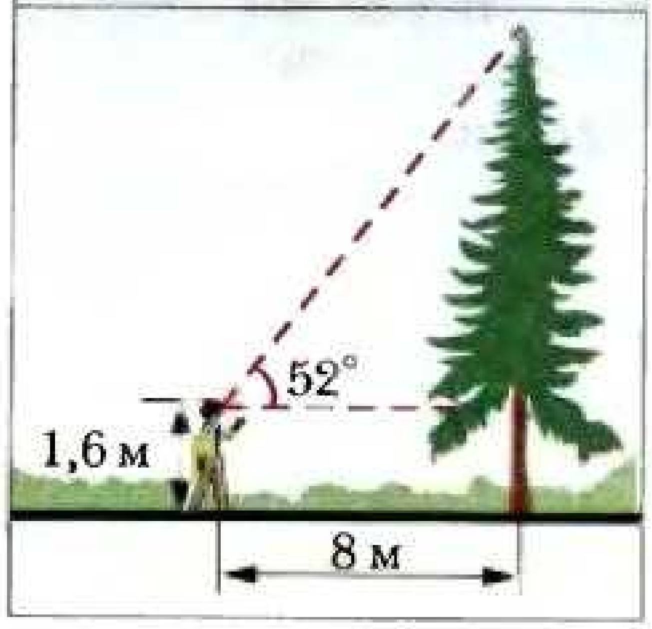
1) по катету и острому углу: $a = 34$ см, $\alpha = 55^\circ$;
2) по гипотенузе и острому углу: $c = 16$ см, $\beta = 18^\circ$;
3) по катету и гипотенузе: $b = 12$ см, $c = 13$ см;
4) по двум катетам: $a = 4$ см, $b = 14$ см.

615. Используя данные рисунка 188, найдите высоту дерева.

616. Какой длины должна быть пожарная лестница, чтобы по ней можно было подняться на крышу дома высотой 9 м, если ставить её под углом 70° к поверхности земли?

617. Проехав от старта по прямолинейному участку шоссе 300 м, велосипедист оказался в точке, расположенной на 11 м выше, чем точка старта. Найдите угол подъёма шоссе на этом участке.

Рис. 188



618. Под каким углом падает на землю солнечный луч, если вертикальный шест длиной 1,5 м отбрасывает тень длиной 0,7 м?

619. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, а высота, проведённая к основанию, — $3\sqrt{3}$ см. Найдите стороны треугольника.

620. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 12 см, а угол при основании — 45°. Найдите высоту и боковую сторону трапеции.

621. Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне и равна a. Найдите стороны параллелограмма, если один из его углов равен 30°.

622. Сторона ромба равна a, а один из его углов — 60°. Найдите диагонали ромба.

623. Сечение траншеи имеет форму равнобокой трапеции (рис. 189). Найдите угол, который образуют стенки траншеи с её дном.

624. Ширина насыпи шоссейной дороги в нижней её части равна 80 м (рис. 190), высота насыпи — 5 м, а откосы наклонены к горизонту под углом 20°. Найдите ширину насыпи в верхней её части.

Рис. 189

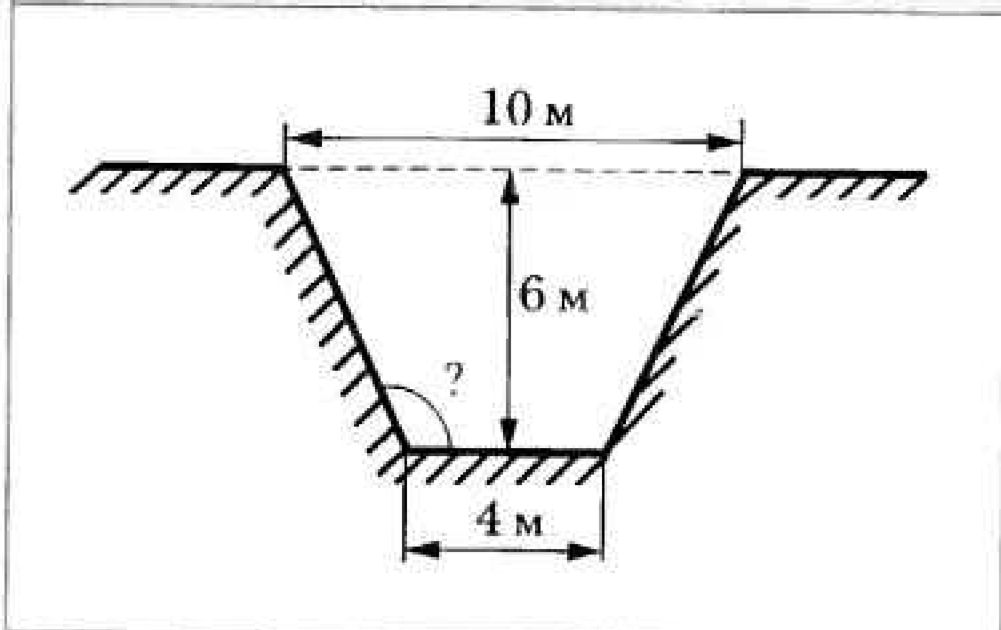
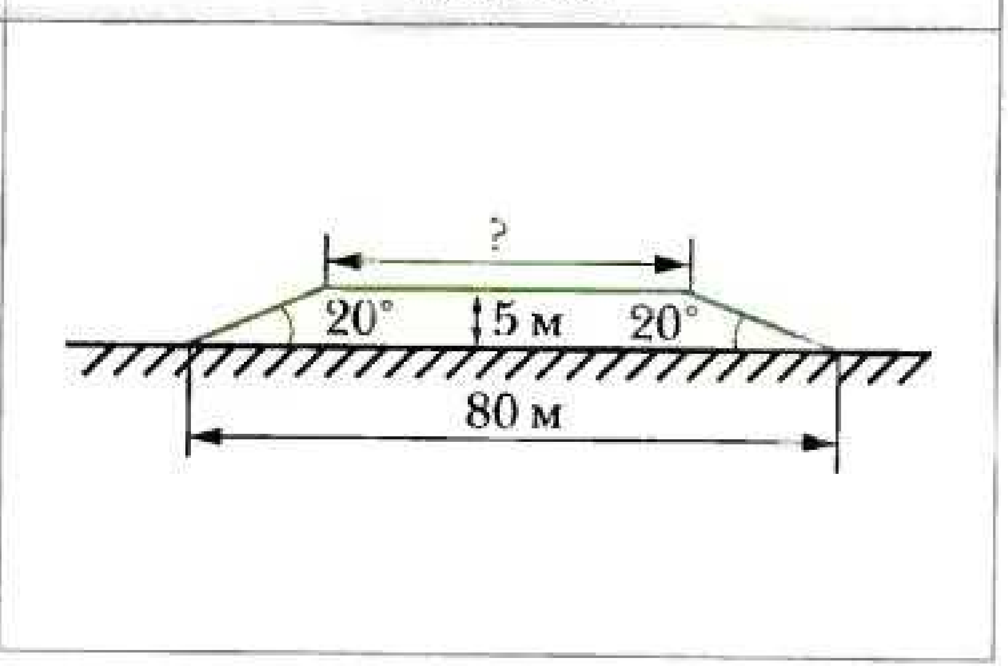


Рис. 190



625. Высота BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и CD так, что $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Найдите сторону BC, если $\angle A = 30^\circ$.

626. Высота AF делит сторону BC треугольника ABC на отрезки BF и CF. Найдите сторону AC, если $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle B = 60^\circ$, а сторона AB равна 18 см.

627. Из точки D, лежащей вне прямой n, проведены к этой прямой наклонные DK и DB, образующие с ней углы 45° и 60° соответственно. Найдите проекцию наклонной DK на прямую n, если $DB = 10\sqrt{3}$ см.

628. Из точки M, лежащей вне прямой l, проведены к этой прямой наклонные MN и MK, образующие с ней углы 30° и 45° соответственно. Найдите наклонную MK, если проекция наклонной MN на прямую l равна $4\sqrt{3}$ см.

629. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен β, высота, проведённая к боковой стороне, равна h. Найдите основание треугольника.

630. Высота, проведённая из вершины прямого угла треугольника, равна h, острый угол равен α. Найдите стороны треугольника.

631. Один из катетов прямоугольного треугольника равен a. Угол между вторым катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла, равен φ. Найдите неизвестные стороны треугольника и проведённую высоту.

632. Бóльшая диагональ ромба равна d, а острый угол равен α. Найдите сторону и меньшую диагональ ромба.

633. Угол ромба равен α, радиус вписанной окружности равен r. Найдите сторону и диагонали ромба.

634. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием трапеции угол 30°. Найдите высоту трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен R.

635. Одна из сторон треугольника равна a, прилежащие к ней углы равны 45° и 60°. Найдите высоту треугольника, проведённую к данной стороне.

636. Основания трапеции равны 7 см и 15 см, а углы при большем основании — 30° и 60°. Найдите высоту и диагонали трапеции.

Упражнения для повторения

637. Периметр параллелограмма равен 48 см. Биссектриса тупого угла делит его сторону в отношении $2 : 1$, считая от вершины острого угла. Может ли меньшая сторона параллелограмма быть равной 7 см?

638. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, $\angle BAC = 52°$, $\angle DBC = 34°$, $\angle ADB = 17°$. Найдите углы четырёхугольника.

639. Известно, что O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Найдите отрезки BO и OD, если $AO : OC = 7 : 6$ и $BD = 39$ см.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

640. Разрежьте ромб на четыре четырёхугольника так, чтобы каждый из них являлся вписанным в окружность и описанным около окружности.

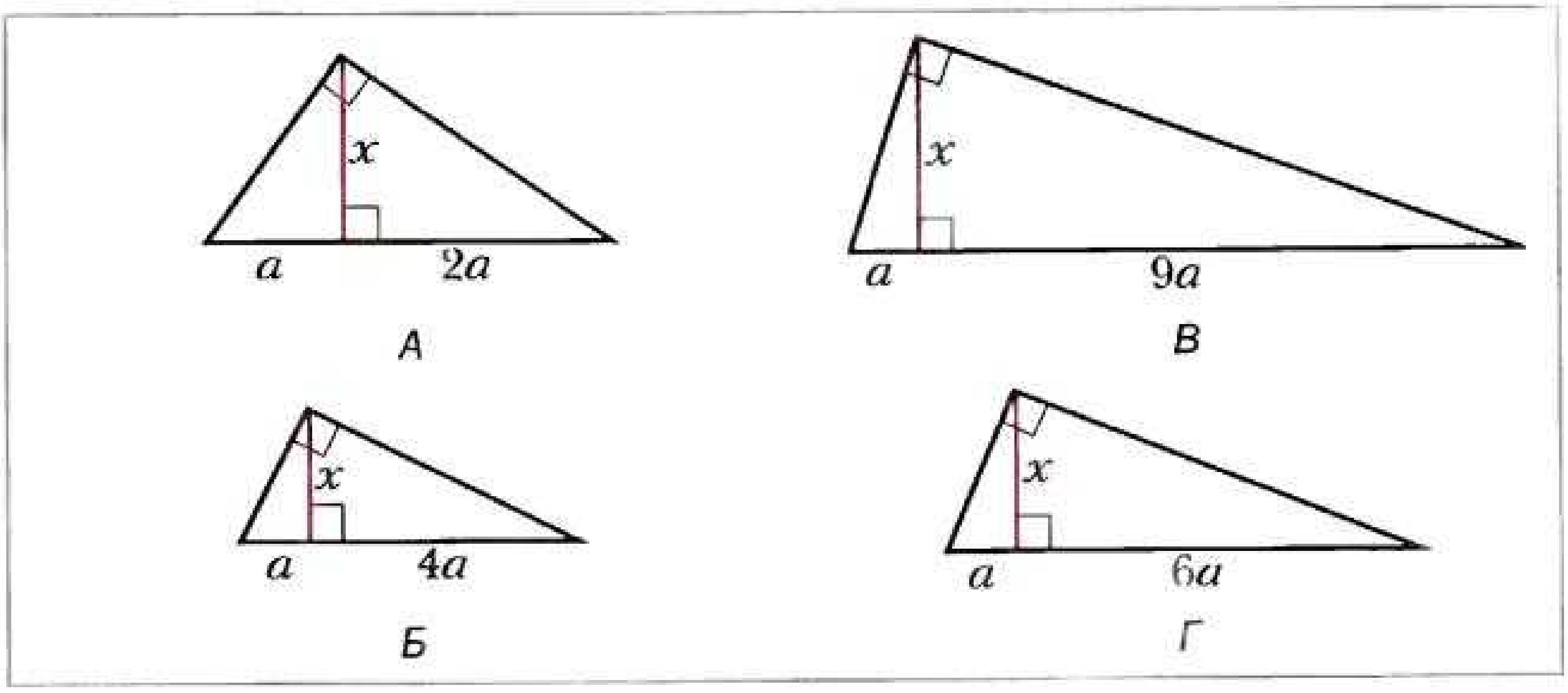
Задание № 3 в тестовой форме «Проверьте себя»

1. Диаметр AB окружности с центром O перпендикулярен хорде CD (рис. 191). Какое из данных равенств неверно?

А) $AC^2 = AM \cdot AB$ В) $AD^2 = MB \cdot AB$

Б) $CM^2 = AM \cdot MB$ Г) $DM^2 = AM \cdot MB$

2. На каком рисунке длина отрезка x равна $2a$?



3. Из теоремы Пифагора следует, что гипотенуза

А) равна сумме катетов

Б) равна сумме квадратов катетов

В) больше катета

Г) равна квадрату суммы катетов

4. Длина отрезка x на рисунке 192 (размеры даны в сантиметрах) равна

А) 4 см Б) 3 см В) 5 см Г) $3\sqrt{2}$ см

5. Биссектриса равностороннего треугольника со стороной a равна

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ В) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ Г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

6. Радиус окружности, описанной около квадрата со стороной a, равен

А) $\frac{a}{2}$ Б) $a\sqrt{2}$ В) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Г) $2a$

7. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна a. Тогда его катет равен

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Б) $a\sqrt{2}$ В) $2a$ Г) $\frac{a}{2}$

8. Пусть α и β – острые углы прямоугольного неравнобедренного треугольника. Какое из данных равенств верно?

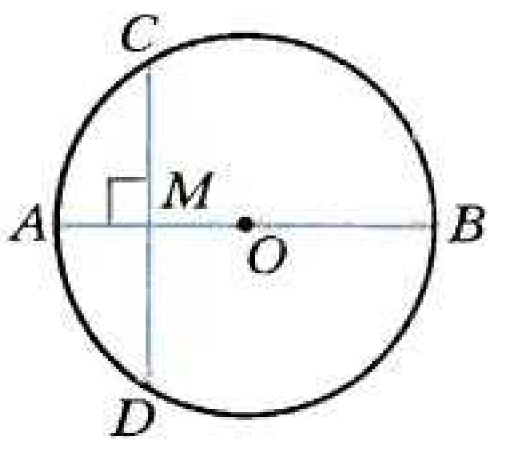


Рис. 191

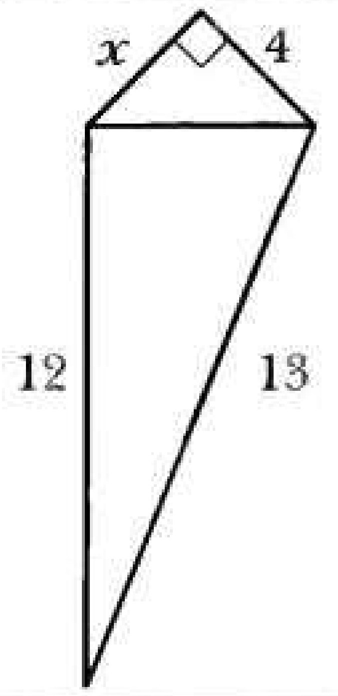


Рис. 192

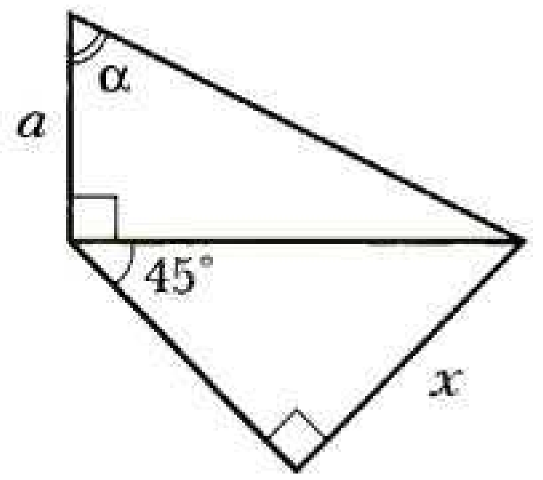


Рис. 193

А) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$ В) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \sin\beta$

Б) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$ Г) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \sin\beta$

9. Пусть α – острый угол прямоугольного треугольника. Какое из данных равенств не может выполняться?

А) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ Б) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ В) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Г) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

10. Длина отрезка x на рисунке 193 равна

А) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sin\alpha$ Б) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$ В) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$ Г) $a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$

Итоги главы 3

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Синус острого угла прямоугольного треугольника

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус острого угла прямоугольного треугольника

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

Тригонометрические формулы

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ — основное тригонометрическое тождество

$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

Соотношения между сторонами и значениями тригонометрических функций углов в прямоугольном треугольнике

- **Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету.**
- **Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету.**
- **Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс угла, противолежащего первому катету.**
- **Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.**
- **Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.**
- **Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.**

Глава 4. Многоугольники. Площадь многоугольника

Изучив материал этой главы, вы узнаете формулу, с помощью которой можно найти сумму углов выпуклого многоугольника.

Вы расширите свои представления о такой знакомой вам величине, как площадь.

Вы научитесь находить площади параллелограмма, треугольника, трапеции.

§ 19. Многоугольники

Рассмотрим фигуру, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ и отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ таких, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек (рис. 194).

Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 195 зелёным цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ называют **многоугольником**. Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называют **вершинами** многоугольника, а указанные выше отрезки — **сторонами** многоугольника.

Стороны, являющиеся соседними отрезками, называют **соседними сторонами** многоугольника. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называют **соседними вершинами** многоугольника.

Две соседние стороны многоугольника образуют **угол многоугольника**. Например, на рисунке 196 α, β, γ, δ являются углами многоугольника, а φ не является углом этого многоугольника.

Многоугольник называют по количеству его углов: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и т. д.

Рис. 194

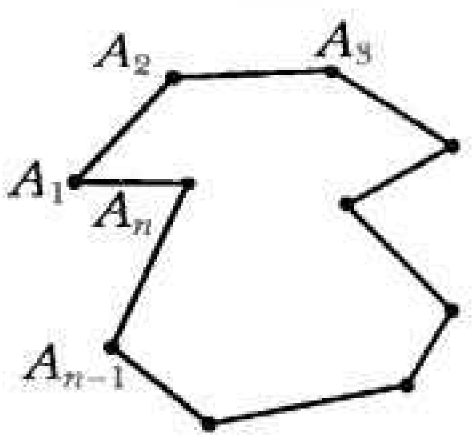


Рис. 195

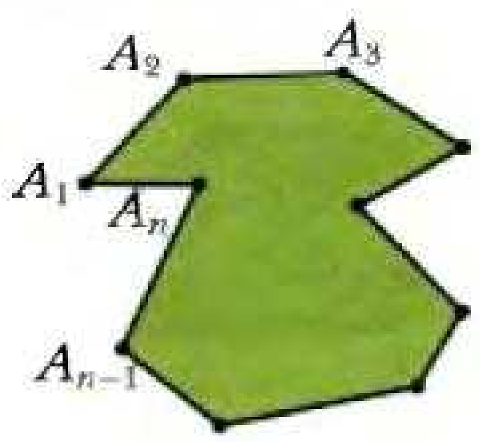
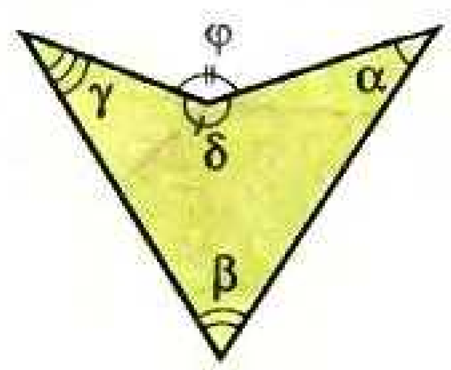


Рис. 196



Многоугольник обозначают по его вершинам. Например, на рисунке 197 изображён пятиугольник $ABCDE$. В обозначении многоугольника буквы, стоящие рядом, соответствуют соседним вершинам. Например, пятиугольник, изображённый на рисунке 197, можно также обозначить следующим образом: $CDEAB$, $EABCD$ и т. д.

Периметром многоугольника называют сумму длин всех его сторон.

Отрезок, соединяющий несоседние вершины многоугольника, называют **диагональю**. Например, на рисунке 198 отрезок AE – диагональ шестиугольника $ABCDEF$.

На рисунке 199 изображён многоугольник, все углы которого меньше развёрнутого. Такой многоугольник называют **выпуклым**. Из сказанного следует, что любой треугольник является выпуклым многоугольником. Заметим, что многоугольники, изображённые на рисунках 196–198, не являются выпуклыми.

Рис. 197

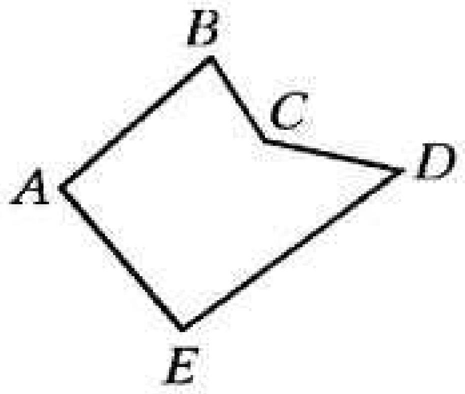


Рис. 198

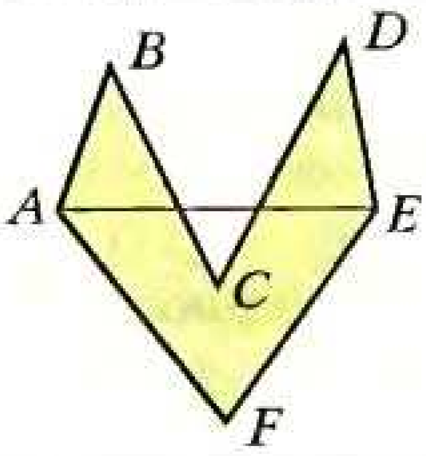
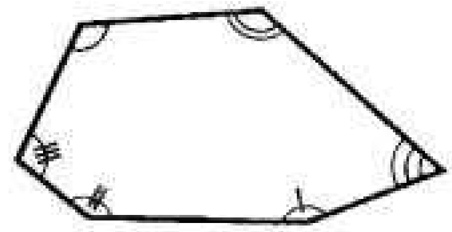


Рис. 199



Выпуклый многоугольник обладает такими свойствами:

1) *выпуклый многоугольник расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону* (рис. 200);

2) *выпуклый многоугольник, отличный от треугольника, содержит любую свою диагональ* (рис. 201).

Если многоугольник не является выпуклым, то он такими свойствами не обладает (*см.* рис. 198, 202).

Рис. 200

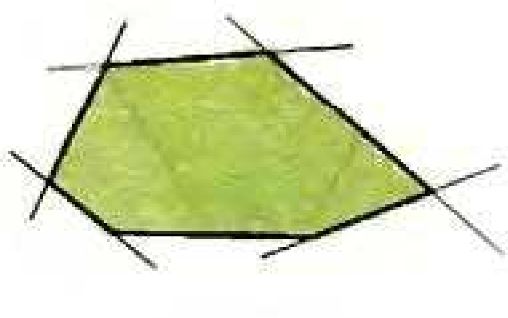


Рис. 201

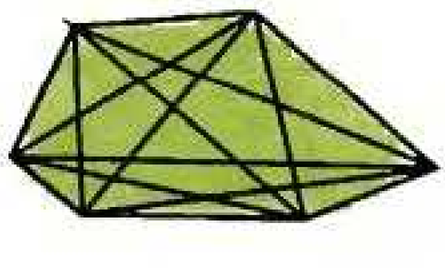
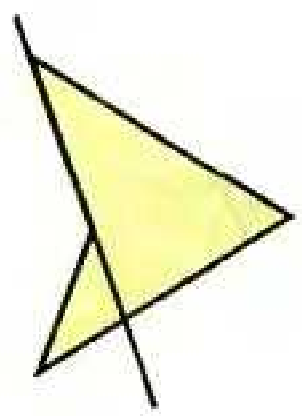


Рис. 202



Теорема 19.1

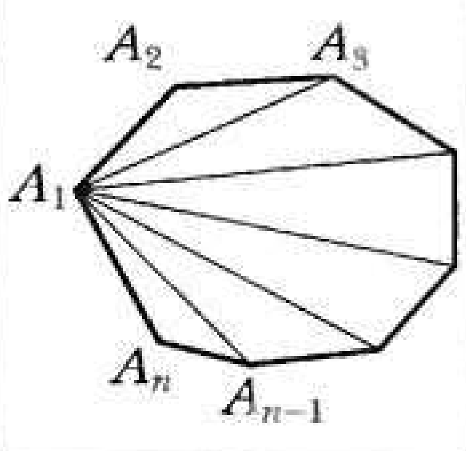
Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Доказательство

На рисунке 203 изображён выпуклый n-угольник $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$. Докажем, что сумма всех его углов равна $180°(n-2)$.

Проведём все его диагонали, выходящие из вершины A_1. Диагонали разбивают данный многоугольник на $(n-2)$ треугольника. Сумма всех углов этих треугольников равна сумме углов n-угольника. Так как сумма углов каждого треугольника равна $180°$, то искомая сумма равна $180°(n-2)$. ◄

Рис. 203



Отметим, что эта теорема справедлива и для любого многоугольника, не являющегося выпуклым.

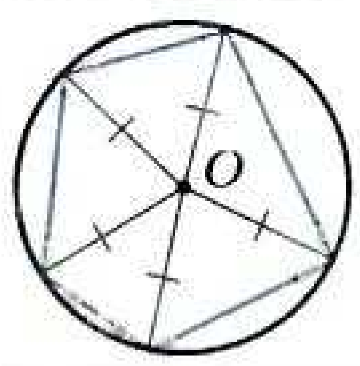
Определение

Окружность называют описанной около многоугольника, если она проходит через все его вершины.

На рисунке 204 изображена окружность, описанная около многоугольника. В этом случае также говорят, что многоугольник **вписан** в окружность.

Центр окружности, описанной около многоугольника, точка O, равноудалён от всех его вершин. Следовательно, точка O принадлежит серединным перпендикулярам всех сторон многоугольника, вписанного в окружность.

Рис. 204



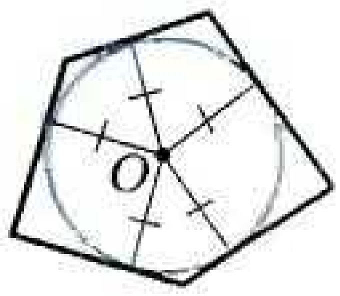
Около многоугольника можно описать окружность, если существует точка, равноудалённая от всех его вершин. Следовательно, если серединные перпендикуляры всех сторон многоугольника пересекаются в одной точке, то около такого многоугольника можно описать окружность.

Определение

Окружность называют вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон.

На рисунке 205 изображена окружность, вписанная в многоугольник. В этом случае также говорят, что многоугольник **описан** около окружности.

Рис. 205



Центр окружности, вписанной в многоугольник, точка O, равноудалён от всех его сторон. Следовательно, точка O принадлежит биссектрисам всех углов многоугольника, описанного около окружности.

В выпуклый многоугольник можно вписать окружность, если существует точка, равноудалённая от всех его сторон. Следовательно, если биссектрисы всех углов выпуклого многоугольника пересекаются в одной точке, то в такой многоугольник можно вписать окружность.

1. Объясните, какую фигуру называют многоугольником.
2. Что называют периметром многоугольника?
3. Что называют диагональю многоугольника?
4. Какой многоугольник называют выпуклым?
5. Как расположен выпуклый многоугольник относительно любой прямой, содержащей его сторону?
6. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?
7. Какую окружность называют описанной около многоугольника?
8. Какая точка является центром окружности, описанной около многоугольника?
9. Какую окружность называют вписанной в многоугольник?
10. Какая точка является центром окружности, вписанной в многоугольник?

Практические задания

641. Начертите и обозначьте произвольный выпуклый семиугольник, назовите все его вершины и стороны. Проведите из одной вершины все диагонали, назовите их. На сколько треугольников диагонали разбили семиугольник?

642. Начертите шестиугольник, каждый угол которого равен $120°$, а каждая сторона — 4 см. Опишите около этого шестиугольника окружность и впишите в него окружность.

643. Начертите пятиугольник, каждый угол которого равен $108°$, а каждая сторона — 3 см. Опишите около этого пятиугольника окружность и впишите в него окружность.

644. Начертите окружность произвольного радиуса, разделите её на 8 равных дуг. Используя точки деления, постройте восьмиугольник, вписанный в окружность.

645. Начертите окружность произвольного радиуса, разделите её на 12 равных дуг. Используя точки деления, постройте двенадцатиугольник, вписанный в окружность.

Упражнения

646. Найдите стороны пятиугольника $ABCDE$, если BC на 1 см больше AB, CD на 2 см больше AB, DE на 3 см больше AB, AE на 4 см больше AB, а периметр пятиугольника равен 100 см.

647. Найдите сумму углов выпуклого: 1) пятиугольника; 2) восьмиугольника; 3) двадцатичетырёхугольника.

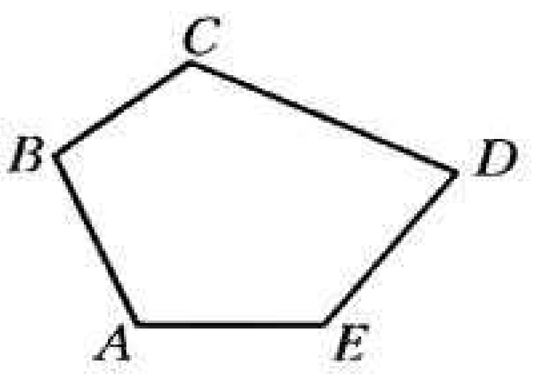
648. Найдите сумму углов выпуклого: 1) девятиугольника; 2) шестнадцатиугольника.

649. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) $1800°$; 2) $720°$; 3) $1600°$?

650. Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен: 1) $150°$; 2) $100°$?

651. На плане земельного участка, имеющего форму пятиугольника (рис. 206), указали такие величины углов: $\angle A = 116°$, $\angle B = 98°$, $\angle C = 124°$, $\angle D = 102°$, $\angle E = 130°$. Верно ли были выполнены измерения?

Рис. 206



652. Найдите углы выпуклого шестиугольника, если они относятся как $3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5$.

653. Найдите углы выпуклого семиугольника, если они относятся как $6 : 7 : 8 : 9 : 9 : 10 : 11$.

654. Сколько диагоналей можно провести: 1) в девятиугольнике; 2) в двадцатиугольнике; 3) в n-угольнике?

655. В выпуклом многоугольнике 54 диагонали. Найдите количество его сторон и сумму углов.

656. Докажите, что если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его углы также равны.

657. Докажите, что если все углы многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его стороны также равны.

658. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а углы, прилежащие к одной из сторон, — прямые. Найдите остальные углы пятиугольника.

659. Три угла выпуклого многоугольника равны по $100°$, а остальные — по $120°$. Определите вид многоугольника.

660. Докажите, что если углы выпуклого шестиугольника равны, то его стороны образуют три пары параллельных сторон.

661. Докажите, что если углы выпуклого пятиугольника равны, то он не имеет параллельных сторон.

Упражнения для повторения

662. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 7 см и 11 см. Найдите периметр трапеции.

663. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведённые к гипотенузе, равны соответственно 13 см и 12 см. Найдите периметр данного треугольника.

664. Биссектриса угла A треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) делит катет BC на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите радиус окружности, которая проходит через точку A, точку C и точку пересечения данной биссектрисы с катетом BC.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

665. На окружности, радиус которой равен 1, отметили 1000 точек. Докажите, что найдётся точка, принадлежащая данной окружности, сумма расстояний от которой до отмеченных точек больше 1000.

§ 20. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

С такой величиной, как площадь, вы часто встречаетесь в повседневной жизни: площадь квартиры, дачного участка, поля и т. п.

Опыт подсказывает вам, что равные земельные участки имеют равные площади, что площадь квартиры равна сумме площадей всех её помещений (комнат, кухни, коридора и т. д.).

Вы знаете, что площади земельных участков измеряют в сотках (арах) и гектарах; площади регионов и государств — в квадратных километрах; площадь квартиры — в квадратных метрах.

На практических знаниях о площади основывается определение площади многоугольника.

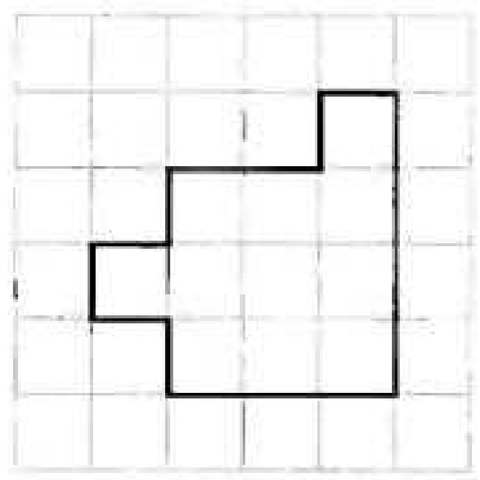
Определение

Площадью многоугольника называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:
1) равные многоугольники имеют равные площади;

2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;
3) за единицу измерения площади принимают единичный квадрат, т. е. квадрат со стороной, равной единице измерения длины.

Измерить площадь многоугольника – это значит сравнить его площадь с площадью единичного квадрата. В результате получают **числовое значение площади** данного многоугольника. Это число показывает, во сколько раз площадь данного многоугольника отличается от площади единичного квадрата.

Рис. 207



Например, если клетку принять за единичный квадрат, то площадь многоугольника, изображённого на рисунке 207, будет равна 11 квадратным единицам (кратко записывают: 11 ед.^{2}).

Обычно для нахождения площади используют формулы, т. е. вычисляют площадь многоугольника по определённым его элементам (сторонам, диагоналям, высотам и т. д.). Некоторые из них вы уже знаете. Например, формулу $S = ab$, где S – площадь прямоугольника, a и b – длины его соседних сторон, вы применяли неоднократно. Для доказательства этой формулы понадобится следующая лемма.

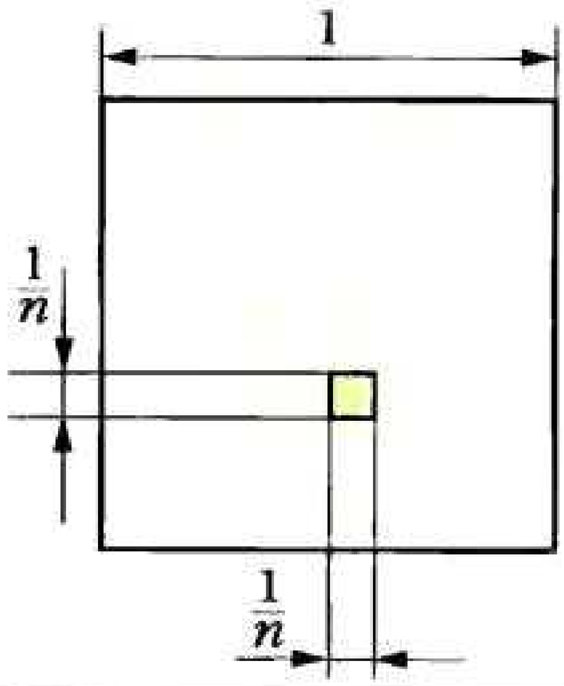
Лемма

Площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ ед. (n — натуральное число) равна $\frac{1}{n^2}$ ед.^{2}.

Доказательство

Рассмотрим единичный квадрат и разделим его на n^2 равных квадратов со стороной $\frac{1}{n}$ (рис. 208).

Рис. 208

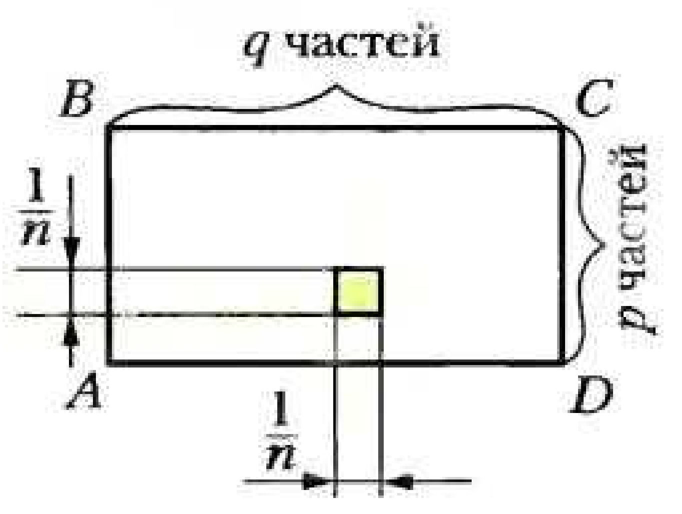


Из определения площади многоугольника (свойство 1) следует, что все эти квадраты имеют равные площади. По свойству 2 сумма площадей этих квадратов равна площади единичного квадрата, т. е. равна 1 ед.^{2}. Поэтому площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$ ед.^{2}. ◄

Теорема 20.1

Площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон.

Рис. 209



На рисунке 209 изображён прямоугольник $ABCD$, длины соседних сторон которого равны a и b: $AB = a$, $BC = b$. Докажем, что площадь S прямоугольника вычисляется по формуле $S = ab$ для случая, когда a и b — рациональные числа. Числа a и b можно представить в виде обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями:

$a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$, где p, q, n — натуральные числа.

Разделим сторону AB на p равных частей, а сторону BC — на q равных частей. Через точки деления проведём прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Тогда прямоугольник будет разделён на pq равных квадратов со стороной $\frac{1}{n}$.

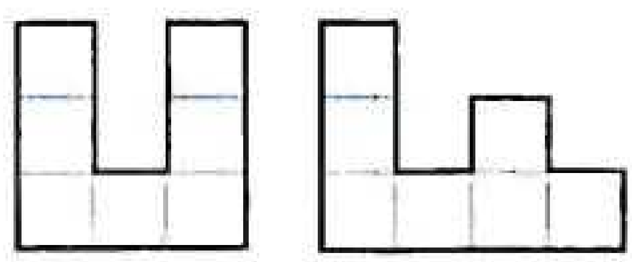
Согласно лемме площадь каждого квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Из определения площади (свойство 2) следует, что площадь прямоугольника равна сумме площадей всех квадратов, т. е. $S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ слагаемых}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$

Рассмотрение случая, когда хотя бы одно из чисел a или b является иррациональным, выходит за рамки рассматриваемого курса.

Определение

Многоугольники, имеющие равные площади, называют равновеликими.

Рис. 210



Из определения площади (свойство 1) следует, что все равные фигуры равновелики. Однако не все фигуры, имеющие равные площади, являются равными. Например, на рисунке 210 изображены два многоугольника, каждый из которых составлен из семи единичных квадратов. Эти многоугольники равновелики, но не равны.

1. Что называют площадью многоугольника?
2. Что значит измерить площадь многоугольника?
3. Что показывает числовое значение площади?
4. Чему равна площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ ед., где n — натуральное число?
5. Чему равна площадь прямоугольника?
6. Какие многоугольники называют равновеликими?
7. Можно ли утверждать, что если две фигуры равны, то они равновелики?
8. Можно ли утверждать, что если две фигуры равновелики, то они равны?

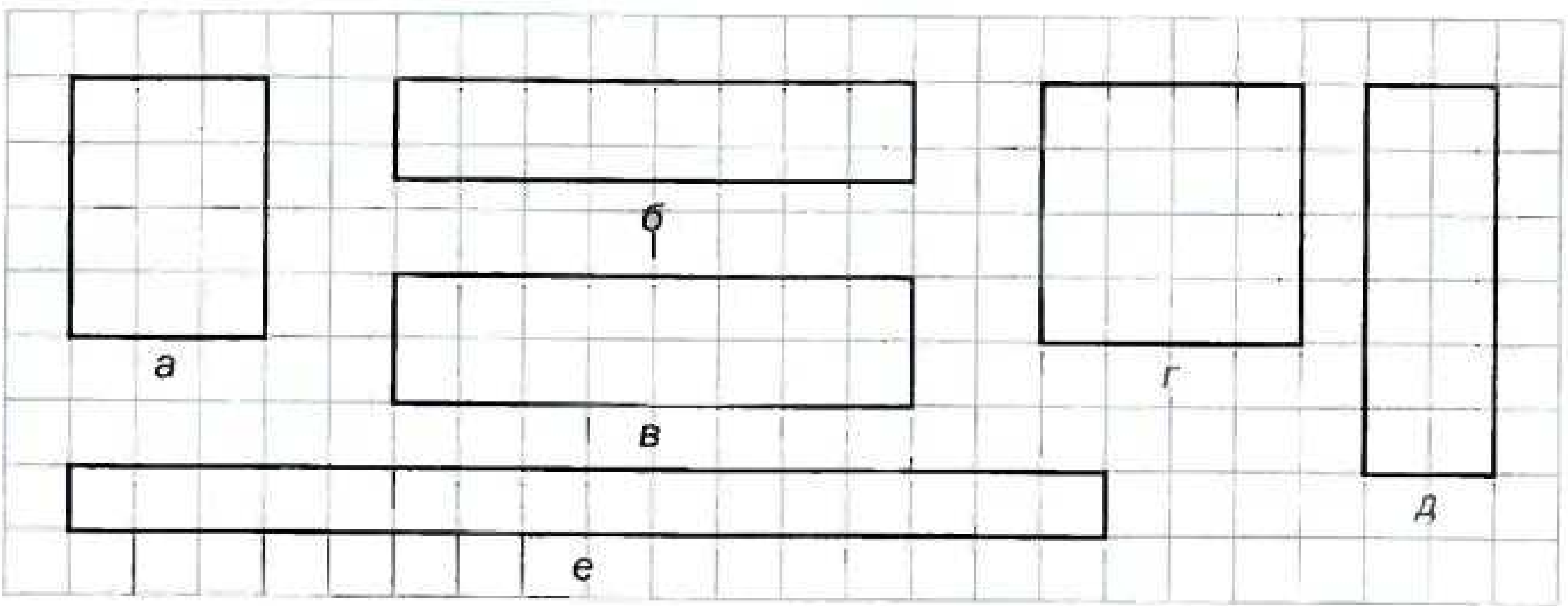
Упражнения

666. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 5 см больше другой, а площадь прямоугольника равна 36 $см^2$.

667. Площадь прямоугольника равна 270 $см^2$, а его стороны относятся как 5 : 6. Чему равны стороны прямоугольника?

668. Какие из прямоугольников, изображённых на рисунке 211, равновелики?

Рис. 211



669. Квадрат со стороной 12 см и прямоугольник, одна из сторон которого равна 8 см, равновелики. Найдите периметр данного прямоугольника.

670. Найдите периметр квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 2 см и 32 см.

10 — 748

671. Достаточно ли 5 т гороха, чтобы засеять им поле, имеющее форму прямоугольника со сторонами 500 м и 400 м, если на 1 га нужно высеять 260 кг гороха?

672. Длина стены равна 6 м, а высота — 3 м. Хватит ли пяти ящиков кафеля, чтобы облицевать им эту стену, если одна плитка имеет форму квадрата со стороной 15 см, а в один ящик помещается 160 плиток?

673. Расход эмалевой краски на однослойное покрытие составляет 180 г на 1 м^2. Хватит ли 3 кг эмали, чтобы покрасить стену длиной 6 м и высотой 3 м?

674. Давление некоторого газа в сосуде составляет 0,0015 Н/м^2. С какой силой давит этот газ на стенку сосуда прямоугольной формы размером 35×24 см?

675. Предел прочности стали некоторой марки равен 60 Н/мм^2. При какой нагрузке разорвётся стержень, поперечное сечение которого является прямоугольником со сторонами 20 мм и 10 мм?

676. Диагональ прямоугольника равна d и образует с одной из сторон угол α. Найдите площадь прямоугольника.

677. Сторона прямоугольника равна 15 см и образует с диагональю угол 30°. Найдите площадь прямоугольника.

678. Найдите отношение площадей двух квадратов, стороны которых относятся как: 1) $3 : 4$; 2) $2 : \sqrt{5}$.

679. Как относятся стороны двух квадратов, если их площади относятся как: 1) $25 : 36$; 2) $3 : 49$?

680. Одна из сторон прямоугольника равна 28 см. Как изменится площадь прямоугольника, если соседнюю его сторону уменьшить на 5 см?

681. Как изменится площадь прямоугольника, если:
1) две его противолежащие стороны увеличить в 3 раза;
2) все его стороны увеличить в 3 раза;
3) две его противолежащие стороны увеличить в 6 раз, а две другие — уменьшить в 3 раза?

682. Как изменится площадь прямоугольника, если:
1) две его противолежащие стороны уменьшить в 4 раза, а две другие — в 2 раза;
2) две его противолежащие стороны увеличить в 4 раза, а две другие — уменьшить в 4 раза?

683. На продолжении стороны AD за точку D параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M так, что $AD = MD$. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ и треугольник ABM равновелики.

684. Площадь квадрата $ABCD$ равна 10 см^2 (рис. 212). Чему равна площадь прямоугольника $BMKD$?

685. Докажите, что если точка E – середина отрезка AK (рис. 213), то треугольник AKD и прямоугольник $ABCD$ равновелики.

Рис. 212

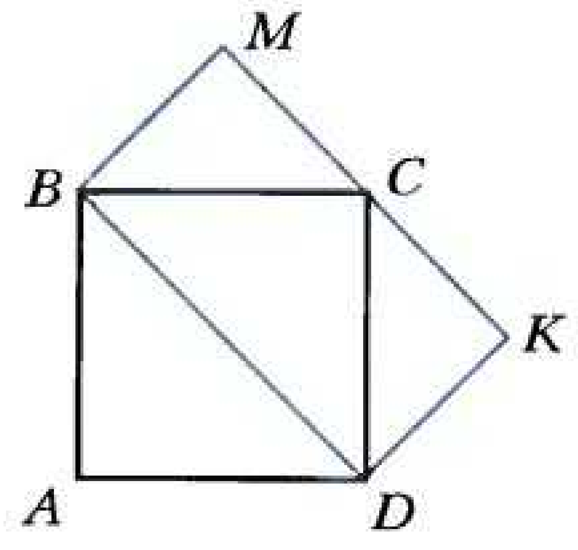
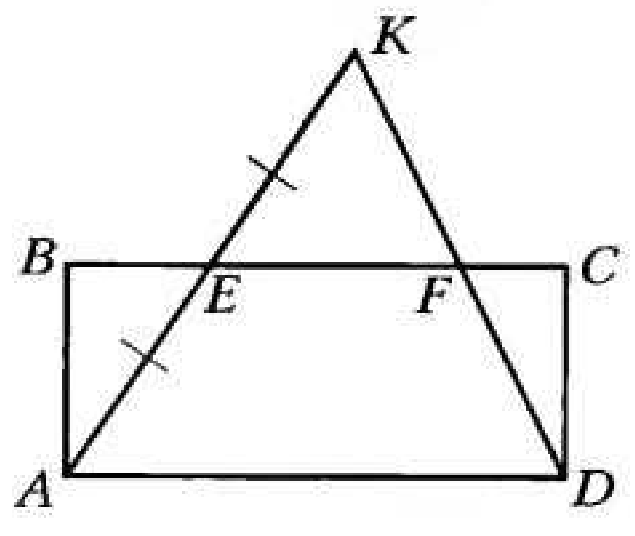


Рис. 213



686. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

687. Площадь прямоугольного листа бумаги, длины сторон которого выражаются целыми числами сантиметров, равна 12 см^2. Сколько квадратов площадью 4 см^2 можно вырезать из этого листа?

688. Площадь прямоугольного листа бумаги, длины сторон которого выражаются целыми числами сантиметров, равна 18 см^2. Сколько квадратов со стороной 3 см можно вырезать из этого листа?

689. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 2 : 7. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 108 см.

690. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 1 : 4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 36 см^2.

691. Постройте квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.

692. Стороны прямоугольника равны a и b. Постройте квадрат, площадь которого равна площади данного прямоугольника.

Упражнения для повторения

693. Серединный перпендикуляр диагонали BD параллелограмма $ABCD$ пересекает стороны AB и CD. Продолжения сторон AD и BC он пересекает в точках M и K соответственно. Определите вид четырёхугольника $MBKD$.

694. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите AM, если $AB = 6$ см и $BC : AD = 3 : 4$.

695. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до его стороны, если острый угол ромба равен $30°$, а сторона – 8 см.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

696. Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей одного треугольника подобна одной из частей другого треугольника. Верно ли, что оставшиеся части также подобны?

§ 21. Площадь параллелограмма

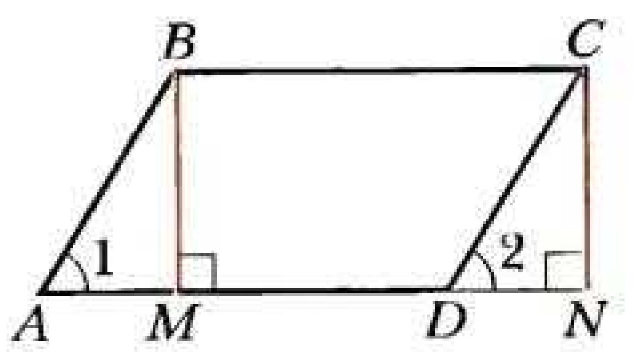
Теорема 21.1

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведённой к этой стороне.

Доказательство

На рисунке 214 изображены параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна S, и его высота BM. Докажем, что $S = BC \cdot BM$.

Рис. 214



Проведём высоту CN. Легко доказать (сделайте это самостоятельно), что четырёхугольник $MBCN$ – прямоугольник. Покажем, что он равновелик данному параллелограмму.

Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольника ABM и трапеции $MBCD$. Площадь прямоугольника равна сумме площадей трапеции $MBCD$ и треугольника DCN. Однако прямоугольные треугольники ABM и DCN равны по гипотенузе и острому углу (отрезки AB и CD равны как противолежащие стороны параллелограмма, углы 1 и 2 равны как соответственные при параллельных прямых AB и DC и секущей AD). Значит, эти треугольники равновелики. Отсюда следует, что параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $MBCN$ равновелики.

По теореме 20.1 площадь прямоугольника равна произведению длин сторон BM и BC. Тогда $S = BC \cdot BM$, где S – площадь параллелограмма $ABCD$.

Для завершения доказательства надо рассмотреть случаи, когда основание M высоты BM не будет принадлежать стороне AD (рис. 215) или совпадёт с вершиной D (рис. 216). И в этих случаях параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $MBCN$ равновелики. Докажите этот факт самостоятельно. ◄

Рис. 215

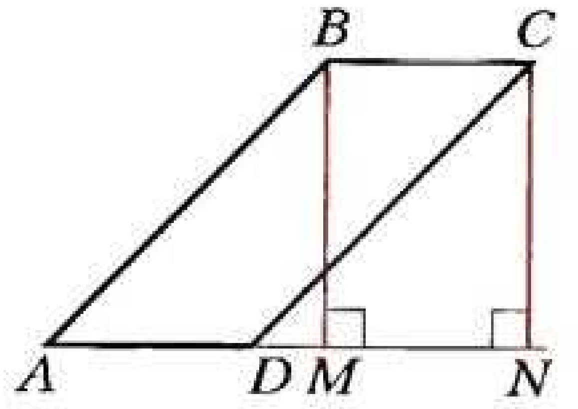
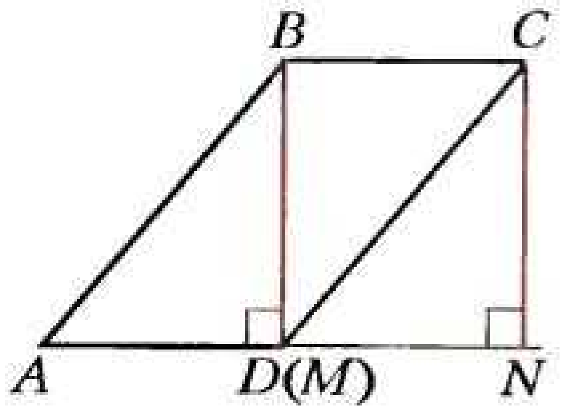


Рис. 216



Если обозначить длины стороны параллелограмма и проведённой к ней высоты соответственно буквами a и h, то площадь S параллелограмма вычисляют по формуле

$$S = ah$$

1. Чему равна площадь параллелограмма?

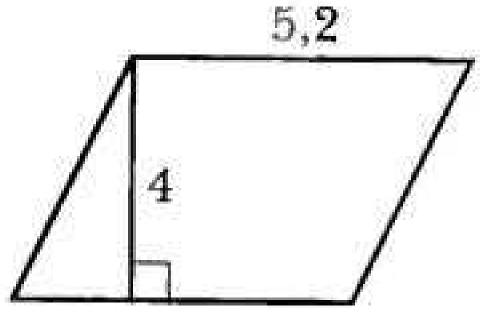
2. По какой формуле вычисляют площадь параллелограмма?

Упражнения

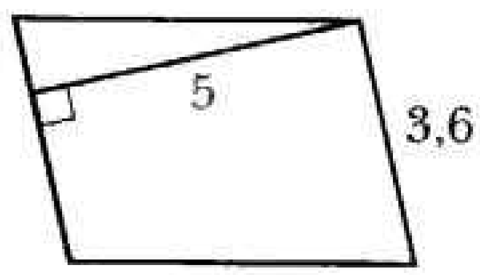
697. Найдите площадь параллелограмма, сторона которого равна 14 см, а проведённая к ней высота – 6 см.

698. Вычислите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке 217 (размеры даны в сантиметрах).

Рис. 217



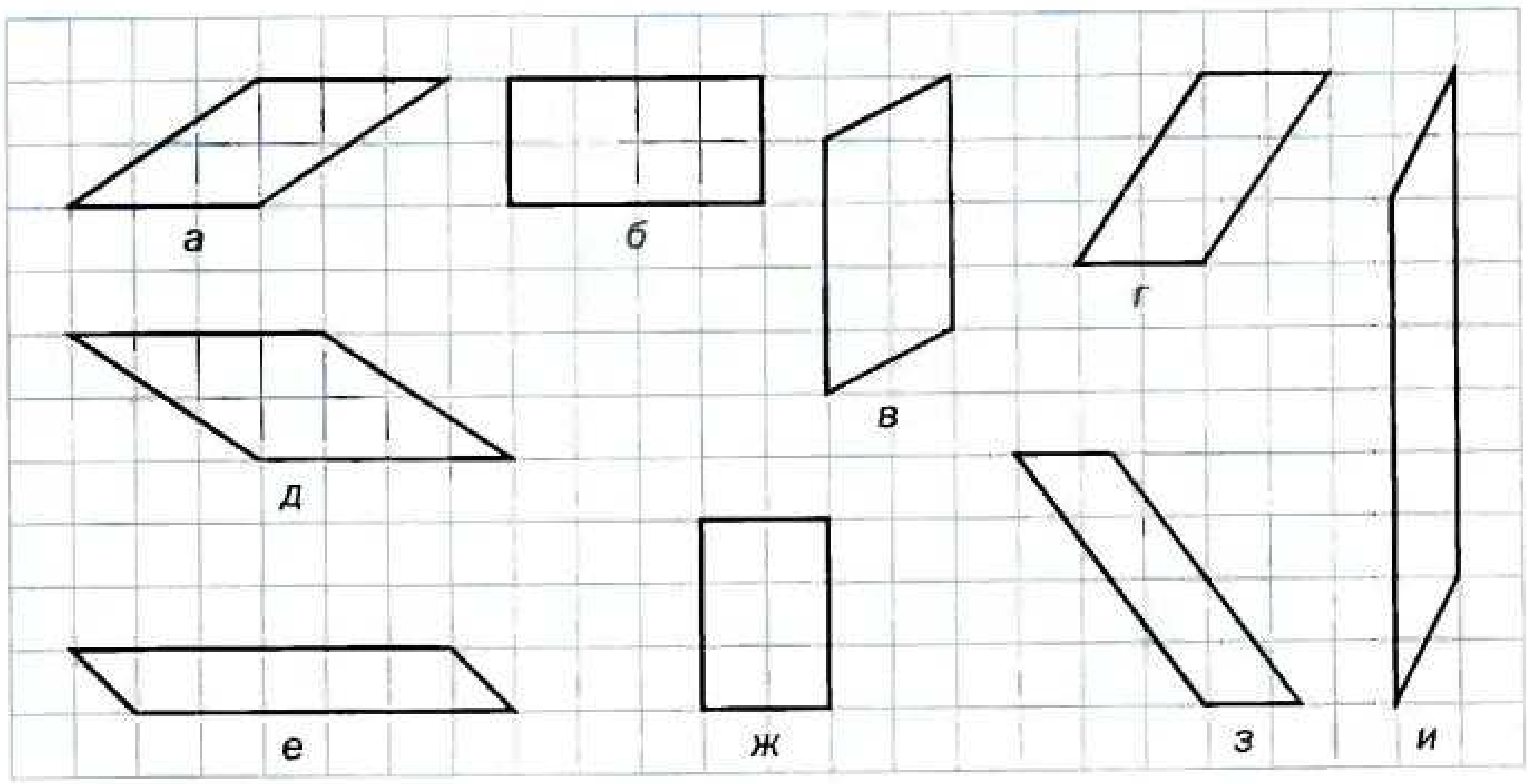
а



б

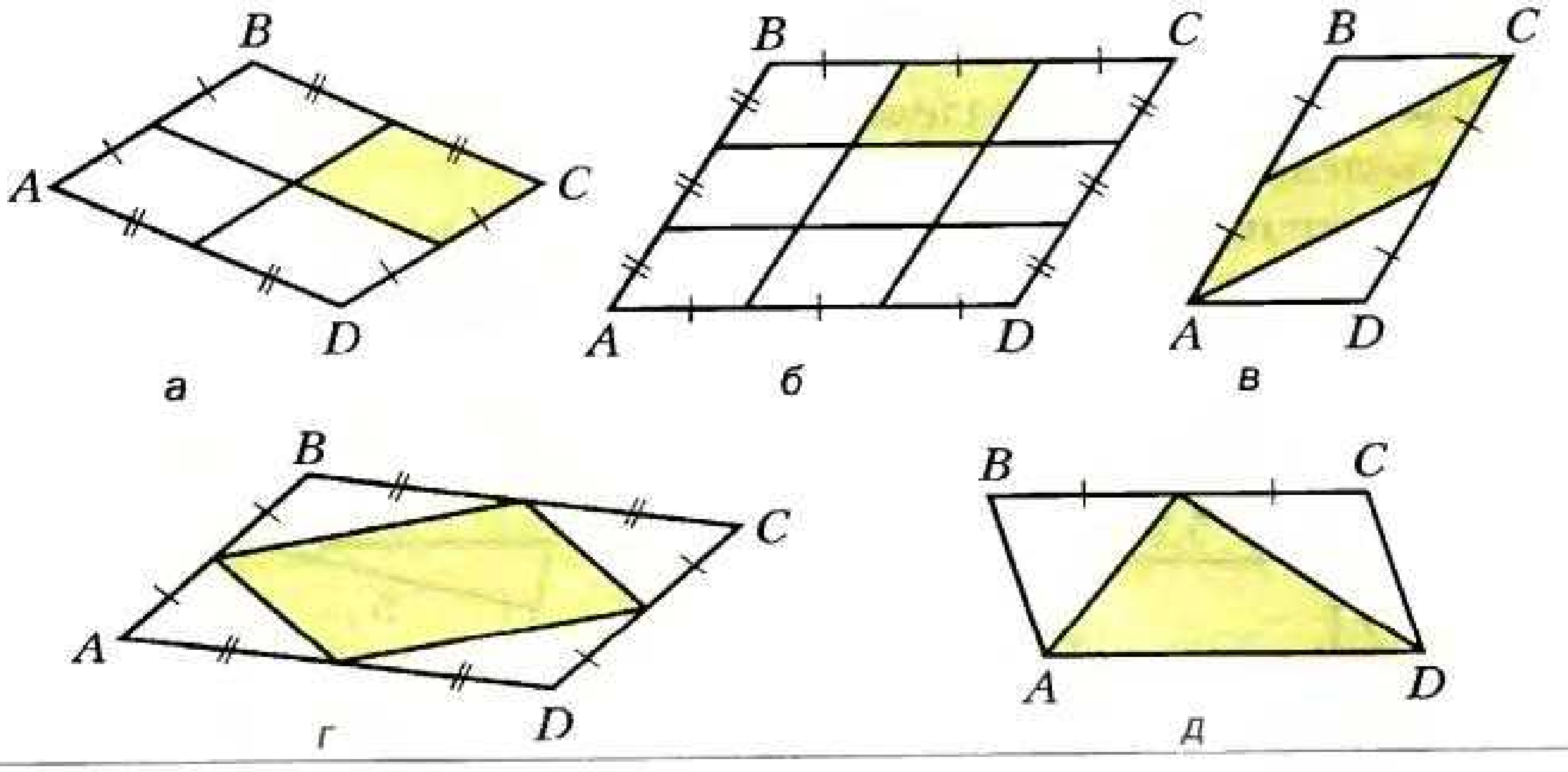
699. Какие из параллелограммов, изображённых на рисунке 218, равновелики?

Рис. 218



700. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 219) равна S. Чему равна площадь закрашенной фигуры?

Рис. 219



701. Площадь параллелограмма равна 17 см^2, а одна из его сторон – 3,4 см. Найдите высоту параллелограмма, проведённую к этой стороне.

702. Площадь параллелограмма равна 40 см^2, а высоты равны 5 см и 4 см. Найдите стороны этого параллелограмма.

703. Заполните таблицу, где a – длина стороны параллелограмма, h – длина высоты, проведённой к этой стороне, S – площадь параллелограмма.

a	6,2 см	16 дм	
h	7 см		0,9 м
S		64 дм^2	5,4 м^2

704. Стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см, а одна из высот равна: 1) 6 см; 2) 12 см. Найдите вторую высоту параллелограмма. Сколько решений в каждом случае имеет задача?

705. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 15 см и 25 см, а одна из диагоналей перпендикулярна меньшей стороне.

706. Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого равны 26 см и 24 см, а одна из них перпендикулярна стороне параллелограмма.

707. Диагональ параллелограмма, равная 18 см, перпендикулярна одной из его сторон и образует угол 30° со второй стороной. Найдите площадь параллелограмма.

708. Стороны параллелограмма равны a и b, его острый угол равен α. Найдите площадь параллелограмма.

709. Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен 60°. Найдите площадь параллелограмма, если его высоты равны 8 см и 12 см.

710. Стороны параллелограмма равны 14 см и 20 см, а угол между его высотами, проведёнными из вершины тупого угла, – 45°. Найдите площадь параллелограмма.

711. Найдите площадь ромба, если его высота равна 6 см, а диагональ – 10 см.

712. Меньшая диагональ ромба равна a, а один из углов – 60°. Найдите площадь ромба.

713. Докажите, что высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

714. Стороны параллелограмма равны 9 см и 12 см, а сумма двух его неравных высот равна 14 см. Найдите площадь параллелограмма.

715. Разность двух сторон параллелограмма равна 12 см, а проведённые к ним высоты равны 15 см и 10 см. Найдите площадь параллелограмма.

716. Докажите, что из всех параллелограммов со сторонами, равными a и b, наибольшую площадь имеет прямоугольник.

Упражнения для повторения

717. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см, AM – биссектриса. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс каждого из углов BAC и AMC.

718. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы AM и CK пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC – равнобедренный, и найдите его боковые стороны, если $AM = 21$ см.

719. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AC. В каком отношении эта прямая делит сторону BC, считая от вершины C?

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

720. Докажите, что в выпуклом девятиугольнике найдутся две диагонали, угол между которыми меньше $7°$.

§ 22. Площадь треугольника

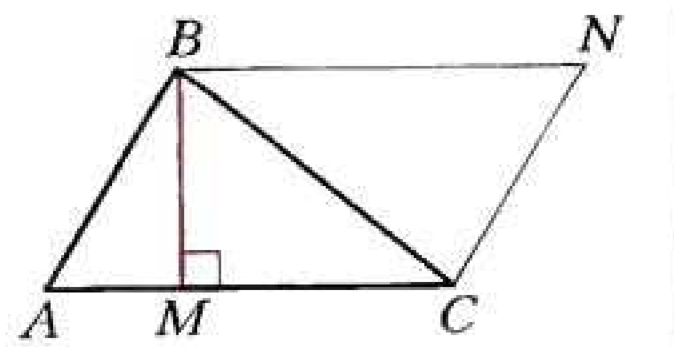
Теорема 22.1

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведённой к ней высоты.

Доказательство

На рисунке 220 изображены треугольник ABC, площадь которого равна S, и его высота BM. Докажем, что $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$.

Рис. 220



Через вершины B и C треугольника проведём прямые, параллельные сторонам AC и AB соответственно (рис. 220). Пусть эти прямые пересекаются в точке N. Четырёхугольник $ABNC$ – параллелограмм по определению. Треугольники ABC и NCB равны (докажите это самостоятельно). Следовательно, равны и их площади. Тогда площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABNC$. Высота BM треугольника ABC является также высотой параллелограмма $ABNC$. Отсюда $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$. ◄

Если воспользоваться обозначениями для длин высот и сторон треугольника ABC, то согласно доказанной теореме имеем:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c,$$

где S – площадь треугольника.

Следствие

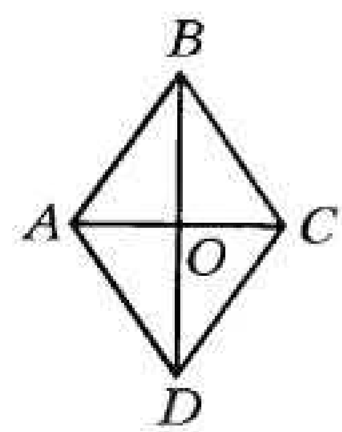
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Задача. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Решение. На рисунке 221 изображён ромб $ABCD$, площадь которого равна S. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажем, что $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Рис. 221



Поскольку диагонали ромба перпендикулярны, то отрезки AO и CO являются высотами треугольников BAD и BCD соответственно. Можно записать: $S = S_{BAD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AO + \frac{1}{2} BD \cdot CO = \frac{1}{2} BD(AO + CO) = \frac{1}{2} BD \cdot AC$. ◄

1. Как найти площадь треугольника, если известны его сторона и высота, проведённая к ней?
2. Как найти площадь прямоугольного треугольника, если известны его катеты?

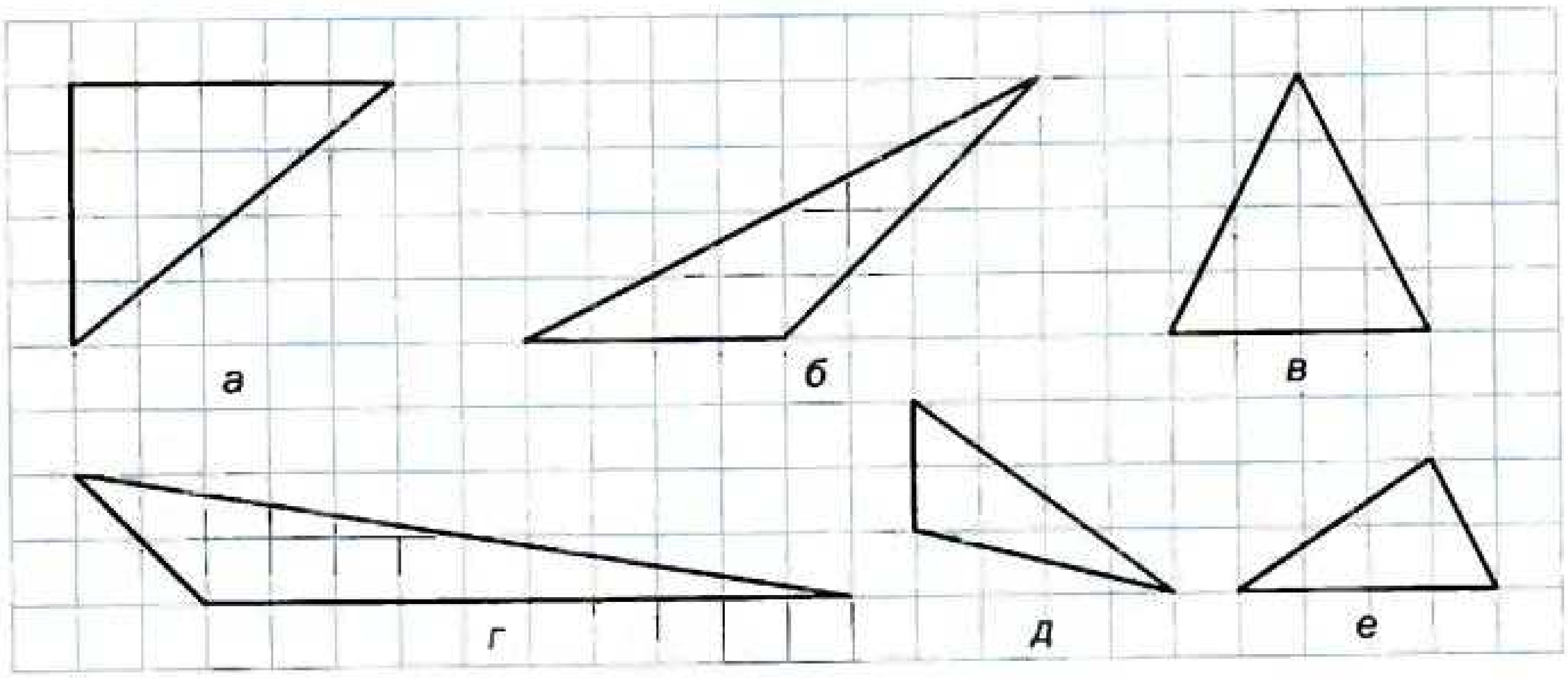
Упражнения

721. Сторона треугольника равна 12 см, а высота, проведённая к ней, – 2,5 см. Найдите площадь треугольника.

722. Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 10 см и 18 см.

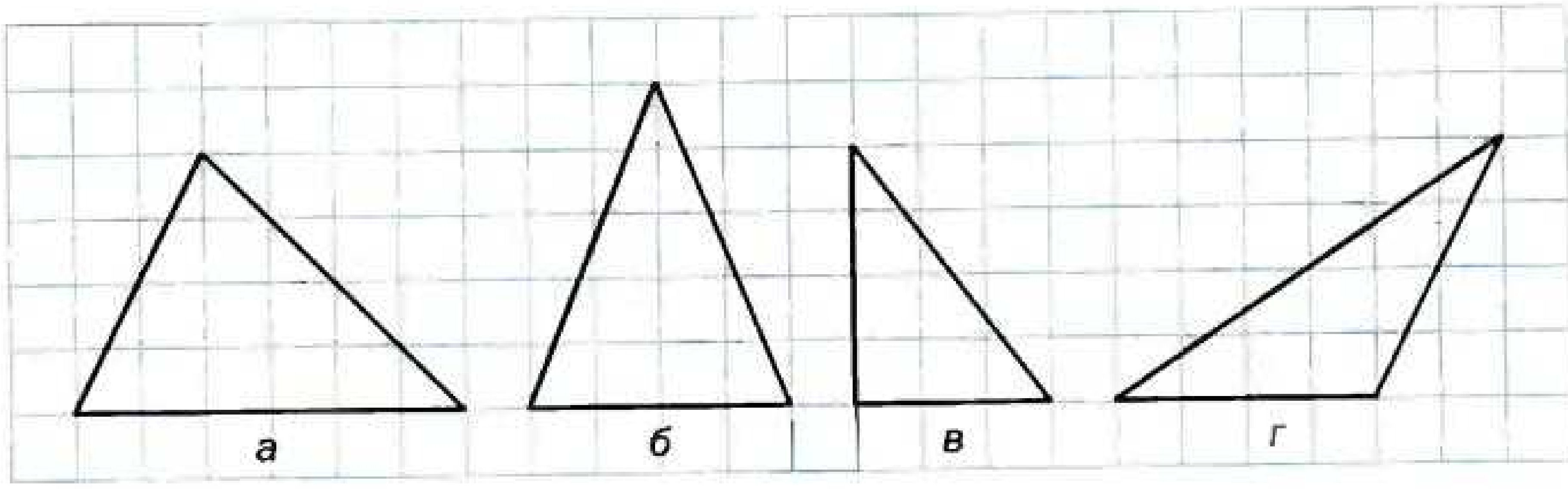
723. Какие из треугольников, изображённых на рисунке 222, равновелики?

Рис. 222



724. Вычислите площадь треугольника, изображённого на рисунке 223, если длина стороны клетки равна единице длины.

Рис. 223



725. Площадь треугольника равна 48 см^2. Найдите сторону треугольника, если высота, проведённая к этой стороне, равна 8 см.

726. Известно, что две стороны треугольника равны 24 см и 9 см, а высота, проведённая к большей из известных сторон, — 6 см. Найдите высоту треугольника, проведённую к меньшей из известных сторон.

727. Заполните таблицу, где a – длина стороны треугольника, h – длина высоты, проведённой к ней, S – площадь треугольника.

a	2,4 см	9 дм	
h	4 см		5 м
S		81 дм^2	65 м^2

728. Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 24 см, а боковая сторона – 13 см.

729. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 61 см, а высота, проведённая к основанию, – 60 см. Найдите площадь треугольника.

730. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а медиана, проведённая к гипотенузе, – 18,5 см. Найдите площадь треугольника.

731. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведённая к гипотенузе, делит её на отрезки длиной 3 см и 27 см.

732. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 8 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу – 6 см. Найдите площадь треугольника.

733. Высота BD треугольника ABC делит его сторону AC на отрезки AD и CD. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ см.

734. Высота AM треугольника ABC делит его сторону BC на отрезки BM и MC. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45°$.

735. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна b, а угол при основании равен α.

736. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна h, а угол при вершине равен β. Найдите площадь треугольника.

737. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна a.

738. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c.

739. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую к гипотенузе, если его катеты равны 10 см и 24 см.

740. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки длиной 8 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

741. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его периметр равен 54 см, а высота, проведённая к основанию, – 9 см.

742. Основание равнобедренного треугольника относится к его высоте, опущенной на основание, как 8 : 3, боковая сторона треугольника равна 40 см. Найдите площадь треугольника.

743. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине их произведения.

744. Площадь ромба равна 120 см², а его диагонали относятся как 5 : 12. Найдите периметр ромба.

745. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 25 см, а сумма диагоналей – 62 см.

746. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 39 см, а разность диагоналей – 42 см.

747. Даны прямая l и параллельный ей отрезок AB. Докажите, что все треугольники AXB, где X – произвольная точка прямой l, равновелики.

748. Докажите, что если высота одного треугольника равна высоте другого треугольника, то площади данных треугольников относятся как их стороны, к которым проведены эти высоты.

749. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

750. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Докажите, что $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{m}{n}$.

751. В треугольнике проведены три медианы. Докажите, что они разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

752. Через вершину B треугольника ABC проведите две прямые так, чтобы они разбили данный треугольник на три равновеликих треугольника.

753. Через вершину параллелограмма проведите прямые так, чтобы они разбили данный параллелограмм на: 1) четыре равновеликих многоугольника; 2) пять равновеликих многоугольников.

754. Через вершину ромба проведите две прямые так, чтобы они разбили данный ромб на три равновеликих многоугольника.

755. Постройте треугольник, равновеликий данному параллелограмму.

756. В треугольнике проведены три высоты. Докажите, что к наибольшей стороне треугольника проведена наименьшая высота.

◇

757. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Пусть X – произвольная внутренняя точка отрезка BM. Докажите, что $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$.

758. Точка касания вписанной окружности делит гипотенузу прямоугольного треугольника на отрезки, один из которых на 14 см больше другого. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

759. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CM. Площадь треугольника ACM равна 6 см^2, а площадь треугольника BCM – 54 см^2. Найдите стороны треугольника ABC.

760. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса его острого угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 21 см и 35 см.

761. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 2 см и 6 см.

762. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его высоту, проведённую к основанию, на отрезки, длины которых равны 34 см и 16 см. Найдите площадь данного треугольника.

763. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону треугольника в отношении 9 : 8, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 16 см.

764. На продолжениях сторон AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC за точки B, C и A соответственно отмечены точки D, E и F так, что $BD = CE = AF = 2AB$. Найдите площадь треугольника DEF, если площадь треугольника ABC равна 1 см^2.

765. В треугольнике ABC отметили точку M так, что площади треугольников AMB, BMC и AMC равны. Докажите, что M – точка пересечения медиан треугольника ABC.

766. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Проведите через эту точку прямую так, чтобы она разбила данный треугольник на два равновеликих многоугольника.

767. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон является постоянной для данного треугольника.

Упражнения для повторения

768. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle AMB = 117^\circ$.

769. В равнобокой трапеции основания равны 18 см и 12 см. Боковая сторона образует с основанием угол 30°. Найдите диагональ трапеции.

770. Центр окружности, вписанной в равнобокую трапецию, удалён от концов её боковой стороны на 12 см и 16 см. Найдите периметр трапеции.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

771. На плоскости даны n точек ($n > 3$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в данных точках, который не содержит ни одной из остальных $(n - 3)$ точек.

§ 23. Площадь трапеции

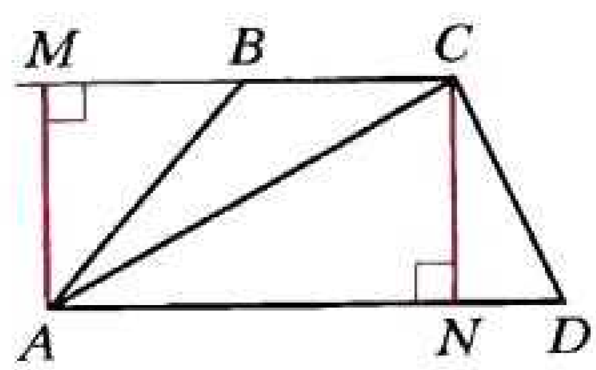
Теорема 23.1

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.

Доказательство

На рисунке 224 изображена трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площадь которой равна S. Отрезок CN – высота этой трапеции. Докажем, что $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$.

Рис. 224



Проведём диагональ AC и высоту AM трапеции. Отрезки AM и CN являются высотами треугольников ABC и ACD соответственно.

Имеем:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BC \cdot AM + \frac{1}{2}AD \cdot CN =$$

$$= \frac{1}{2}BC \cdot CN + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \blacktriangleleft$$

Если обозначить длины оснований трапеции и её высоты соответственно буквами a, b и h, то площадь S трапеции вычисляют по формуле

$$\boxed{S = \frac{a + b}{2} \cdot h}$$

Следствие

Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.

1. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
2. По какой формуле вычисляют площадь трапеции?

Упражнения

772. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 7 см и 12 см, а высота — 6 см.

773. Найдите площадь трапеции, средняя линия которой равна 18 см, а высота — 9 см.

774. Площадь трапеции равна 96 см^2, а её высота — 3 см. Найдите основания трапеции, если они относятся как 3 : 5.

775. Площадь трапеции равна 45 см^2, одно из оснований — 8 см, а высота — 6 см. Найдите другое основание трапеции.

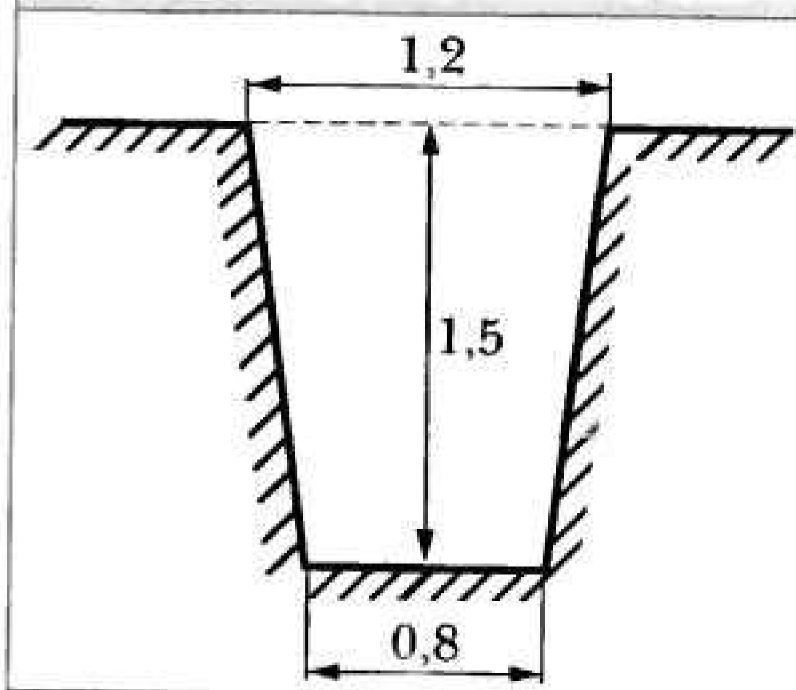
776. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 14 см и 16 см, а диагональ — 17 см.

777. Чему равна площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 9 см и 16 см, а бо́льшая боковая сторона — $\sqrt{65}$ см?

778. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 14 см и 32 см, а боковая сторона — 15 см.

779. На рисунке 225 изображено поперечное сечение траншеи, которое имеет форму трапеции. Вычислите площадь этого поперечного сечения (размеры даны в метрах).

Рис. 225

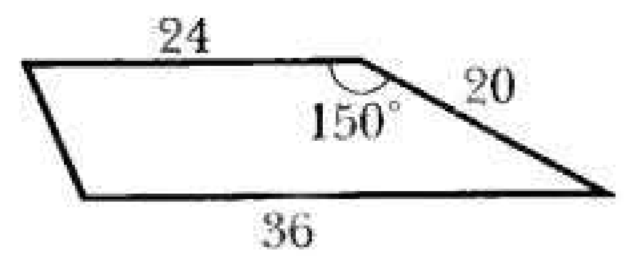


780. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 226 (размеры даны в сантиметрах).

Рис. 226

781. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 227 (размеры даны в сантиметрах).

Рис. 227



782. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 6 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

783. Основания прямоугольной трапеции равны 9 см и 17 см, а диагональ является биссектрисой её тупого угла. Вычислите площадь трапеции.

784. Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию. Найдите площадь трапеции, если её боковые стороны равны 17 см и 25 см, а высота – 15 см.

785. Точка пересечения биссектрис тупых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию. Найдите площадь трапеции, если её боковые стороны равны 10 см и 17 см, а высота – 8 см.

786. Боковая сторона равнобокой трапеции равна $20\sqrt{3}$ см и образует с основанием угол 60°. Найдите площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность.

787. Основания равнобокой трапеции равны 32 см и 50 см. Чему равна площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность?

788. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 8 см, а острый угол – 45°. Найдите площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность.

789. Бóльшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 28 см, а острый угол – 30°. Найдите площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность.

790. Докажите, что прямая, которая проходит через середину средней линии трапеции и пересекает её основания, разбивает данную трапецию на два равновеликих многоугольника.

791. Постройте равновеликий данной трапеции:
1) параллелограмм, отличный от прямоугольника;
2) прямоугольник.

792. Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.

793. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 24 см и 40 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

794. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, которая равна 15 см. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности, описанной около неё, равен 12,5 см.

795. Диагонали трапеции перпендикулярны, одна из них равна 48 см, а средняя линия трапеции – 25 см. Найдите площадь трапеции.

796. Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой её острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно a.

797. В равнобокую трапецию вписана окружность. Одна из её боковых сторон точкой касания делится на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.

798. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 12 см. Бóльшая из боковых сторон точкой касания делится на два отрезка, больший из которых равен 16 см. Найдите площадь трапеции.

799. Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

800. Бóльшая диагональ прямоугольной трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 9 см. Бóльшая боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

801. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, точка M – середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CMD, если площадь данной трапеции равна S.

Упражнения для повторения

802. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, а треугольника ABD – 40 см. Найдите стороны параллелограмма, если $AD = BD$.

803. Окружность, построенная на диагонали AC ромба $ABCD$ как на диаметре, проходит через середину стороны AB. Найдите углы ромба.

804. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M, K и D так, что $MK \parallel AC$, $DK \parallel AB$, $BK : KC = 3 : 2$. Найдите периметр четырёхугольника $AMKD$, если $AC = 15$ см, $AB = 25$ см.

Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте

805. Можно ли квадрат со стороной 1,5 см накрыть тремя квадратами со стороной 1 см?

11 — 748

Когда сделаны уроки

Равносоставленные и равновеликие многоугольники

Если некоторый многоугольник можно разре́зать на части и составить из них другой многоугольник, то такие многоугольники называют **равносоставленными**.

Например, если прямоугольник разрезать вдоль его диагонали (рис. 228), то получим два равных прямоугольных треугольника, из которых можно составить равнобедренный треугольник (рис. 229). Фигуры на рисунках 228 и 229 — равносоставленные.

Очевидно, что равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Этот факт применяют при доказательстве теорем и решении задач. Например, доказывая теорему 21.1, мы фактически разрезали параллелограмм на треугольник ABM и трапецию $MBCD$, из которых составили прямоугольник $MBCN$ (*см.* рис. 215).

Если треугольник разрезать вдоль средней линии, то из полученных треугольника и трапеции можно составить параллелограмм (рис. 230).

Рис. 228

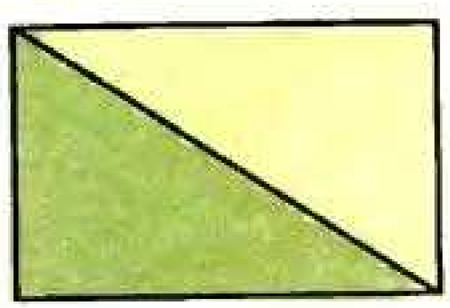


Рис. 229

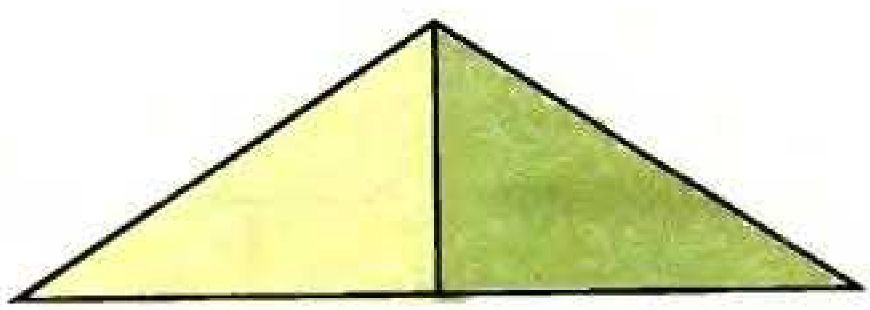
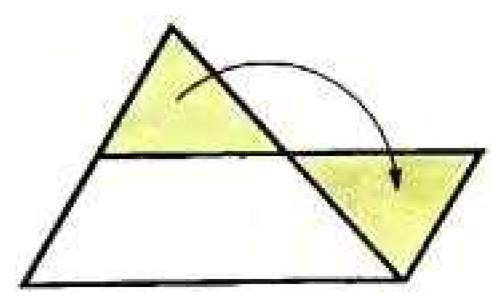
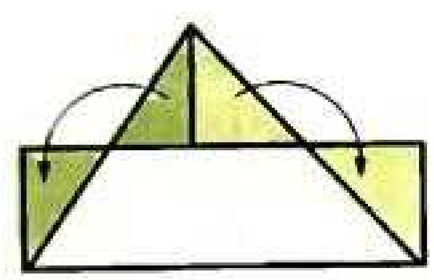


Рис. 230



Легко установить (сделайте это самостоятельно), что такое разрезание треугольника приводит ещё к одному доказательству теоремы о площади треугольника (теорема 22.1). Этой же цели служит разрезание треугольника на части, из которых можно составить прямоугольник (рис. 231).

Рис. 231



Евклид в своей знаменитой книге «Начала» формулирует теорему Пифагора следующим образом:

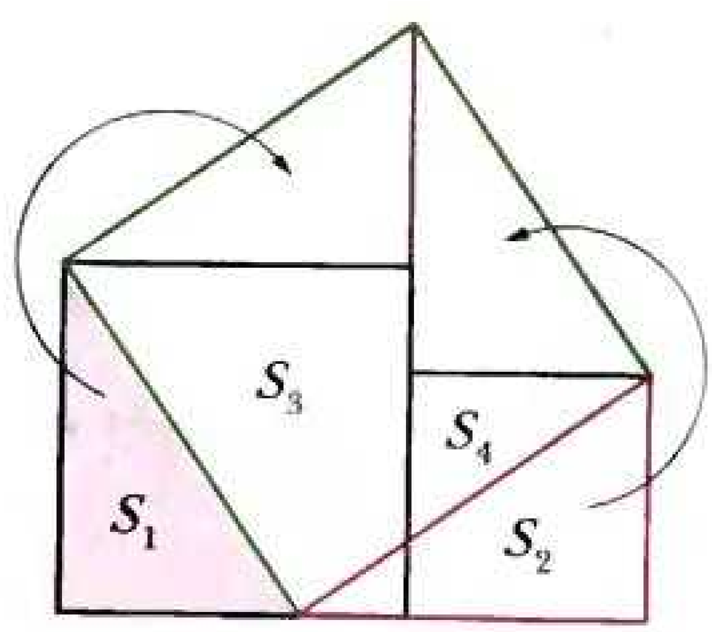
«Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах».

Если показать, что квадраты, построенные на катетах, разрезаются на части, из которых можно составить квадрат со стороной, равной гипотенузе, то этим будет доказана теорема Пифагора.

На рисунке 232 показан один из возможных способов такого разрезания. Квадраты, построенные на катетах, разрезаны на части, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4. Из этих частей составлен квадрат, построенный на гипотенузе.

Из определения площади многоугольника следует, что равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Но совсем неочевидной является такая теорема.

Рис. 232



Теорема

Любые два равновеликих многоугольника являются равносоставленными.

Впервые этот факт доказал в 1832 г. венгерский математик Фаркаш Бойяи. Позднее немецкий математик П. Гервин нашёл другое доказательство. Поэтому эту теорему называют теоремой Бойяи – Гервина.

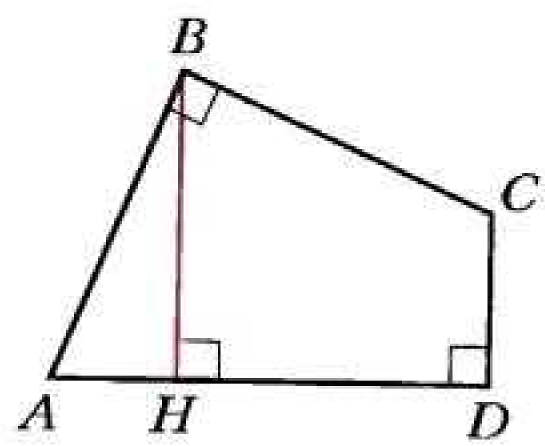
Упражнения

1. Докажите, что трапеция является равносоставленной с параллелограммом, основание которого равно средней линии трапеции, а высота – высоте трапеции.

2. Докажите, что площадь трапеции равна произведению боковой стороны и перпендикуляра, опущенного на прямую, которая содержит эту сторону, из середины другой боковой стороны.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые, а стороны AB и BC равны (рис. 233). Известно, что $BH \perp AD$ и $BH = 1$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

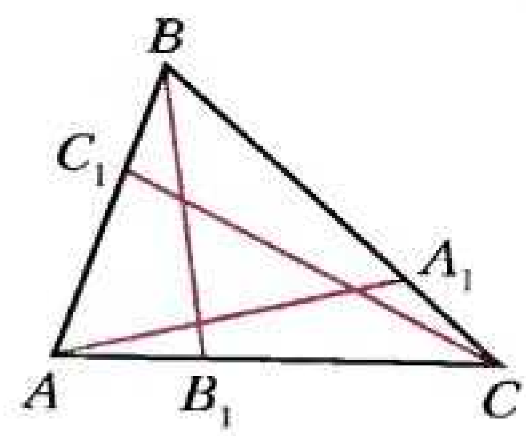
Рис. 233



Теорема Чевы

На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отметим произвольные точки A_1, B_1, C_1 (рис. 234). Каждый из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 на-

Рис. 234



зывают **чевианой** треугольника ABC. Такое название связано с именем итальянского инженера и математика Джованни Чевы (1648–1734), открывшего удивительную теорему.

Если точки A_1, B_1 и C_1 выбраны так, что чевианы являются биссектрисами, либо медианами, либо высотами треугольника, то эти чевианы пересекаются в одной точке.

Если три прямые пересекаются в одной точке, то их называют **конкурентными**.

Теорема Чевы даёт критерий конкурентности произвольных трёх чевиан.

Теорема

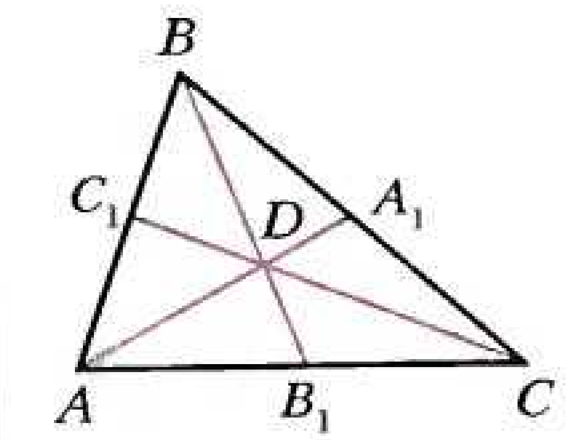
Для того чтобы чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доказательство

Докажем сначала необходимое условие конкурентности: если чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то выполняется равенство (*).

Рис. 235



Воспользовавшись результатом ключевой задачи 757, можно записать (рис. 235):

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{ADC}}{S_{BDC}}, \ \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}, \ \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{BDC}}{S_{ABD}}.$$

Перемножив записанные равенства, получим равенство (*).

Докажем теперь достаточное условие конкурентности: если выполняется равенство (*), то чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Пусть чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D, а чевиана, проходящая через вершину C и точку D, пересекает сторону AB в некоторой точке C_2. Из доказанного выше можно записать:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Сопоставляя это равенство с равенством (*), приходим к выводу, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$, т. е. точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении, а значит, эти точки совпадают. Следовательно, прямая CD пересекает сторону AB в точке C_1. ◂

Упражнения

1. Докажите, что:
1) медианы треугольника конкурентны;
2) биссектрисы треугольника конкурентны;
3) высоты остроугольного треугольника конкурентны.

2. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами BC, AC, AB треугольника ABC. Докажите, что чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны.

3. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP соответственно, конкурентны.

Указание. Примените теорему Чевы к треугольнику, вершины которого являются серединами сторон треугольника ABC.

Задание № 4 в тестовой форме «Проверьте себя»

1. Сколько сторон в выпуклом n-угольнике, если сумма его углов равна $1260°$?

А) 7 Б) 9 В) 11 Г) 13

2. В выпуклом n-угольнике 14 диагоналей. Чему равна сумма его углов?

А) $1000°$ Б) $800°$ В) $900°$ Г) $720°$

3. Как изменится площадь прямоугольника, если каждую из его сторон уменьшить в 10 раз?

А) уменьшится в 100 раз В) уменьшится в 10 раз
Б) уменьшится в 20 раз Г) уменьшится в 1000 раз

4. Площадь параллелограмма равна 80 см^2, а одна из его сторон – 16 см. Какой длины может быть другая сторона параллелограмма?

А) 2 см Б) 3 см В) 4 см Г) 6 см

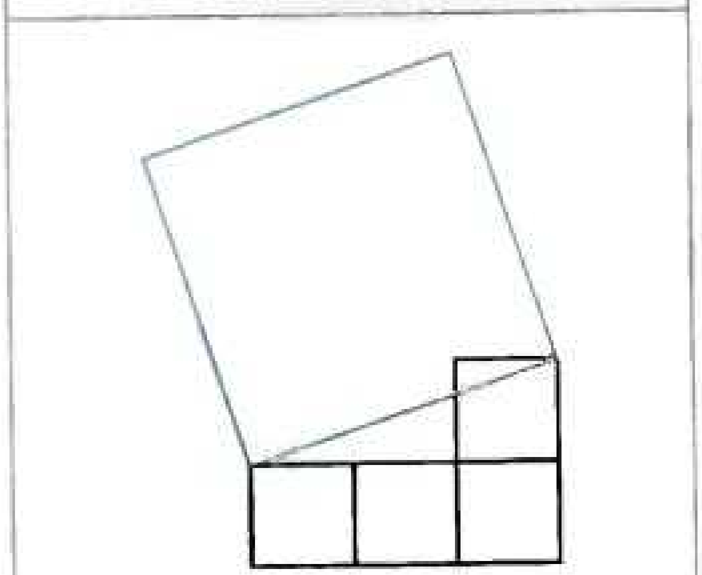
5. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M так, что $BM : MC = 1 : 3$. Чему равна площадь треугольника ABM, если площадь параллелограмма равна S?

А) $\frac{S}{8}$ Б) $\frac{S}{4}$ В) $\frac{S}{16}$ Г) $\frac{S}{2}$

6. На рисунке 236 площадь каждого из маленьких квадратов равна 4 см^2. Чему равна площадь большого квадрата?

А) 16 см^2 В) 32 см^2
Б) 20 см^2 Г) 40 см^2

Рис. 236



7. В окружность радиуса 1 см вписаны квадрат и равносторонний треугольник. Чему равно отношение площади треугольника к площади квадрата?

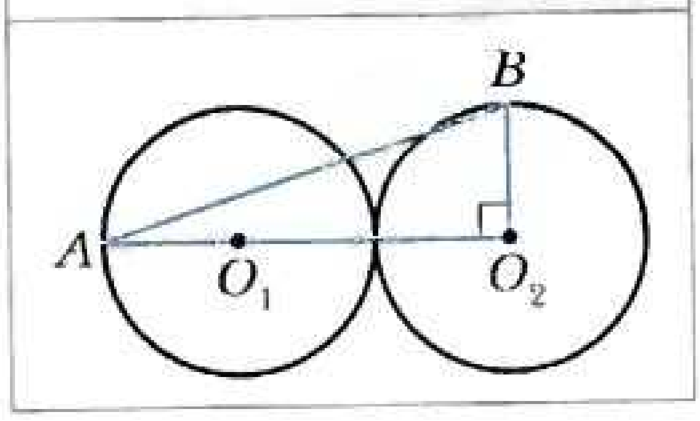
А) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ В) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Б) $3\sqrt{3}$ Г) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

8. Точки O_1 и O_2 – центры равных касающихся окружностей (рис. 237), $BO_2 \perp O_1O_2$, $AB = 10$ см. Чему равна площадь треугольника ABO_2?

А) 10 см^2 В) 18 см^2
Б) 15 см^2 Г) 20 см^2

Рис. 237



9. Даны две точки A и B. Геометрическим местом точек X таких, что площади треугольников AXB равны данному числу S, является

А) окружность с диаметром AB
Б) серединный перпендикуляр отрезка AB
В) прямая, параллельная AB
Г) две прямые, параллельные AB

10. Диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны и делят её среднюю линию на три равные части. Чему равна площадь трапеции, если её большее основание равно 12 см?

А) 50 см^2 Б) 64 см^2 В) 81 см^2 Г) 144 см^2

Итоги главы 4

Сумма углов выпуклого n-угольника

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Окружность, описанная около многоугольника

Окружность называют описанной около многоугольника, если она проходит через все его вершины.

Окружность, вписанная в многоугольника

Окружность называют вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон.

Площадь многоугольника

Площадью многоугольника называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:

1) равные многоугольники имеют равные площади;

2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;

3) за единицу измерения площади принимают единичный квадрат, т. е. квадрат со стороной, равной единице измерения длины.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон.

Равновеликие многоугольники

Многоугольники, имеющие равные площади, называют равновеликими.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведённой к этой стороне.

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведённой к ней высоты.

Площадь прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Площадь трапеции

- Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.
- Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.

Дружим с компьютером

В 7 классе вы уже использовали компьютер при изучении геометрии. В 8 классе вы будете изучать более сложные геометрические фигуры, а значит, сможете расширить свои умения, освоив более совершенные инструменты графических пакетов. Напомним, что, кроме заданий, приведённых в этом разделе, вы можете использовать разнообразные программы, созданные специально для освоения школьного курса геометрии. Вот ссылки на некоторые из таких программ:

http://www.pcmath.ru/?parent=1&page=1/

http://obr.1c.ru/catalog.jsp?top=3/

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/903077b7-0221-4823-b549-b236326d48d4/114760/?/

http://www.dgeometry.ru/links/2d.html/

Список полезных программ далеко не исчерпывается приведёнными. Вы можете использовать глобальную сеть Интернет для поиска нужной вам информации.

Задания «Дружим с компьютером»

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство из них – задания на построения геометрических фигур, которые вы будете выполнять с помощью графического редактора.

Кроме этого, вы можете решать задачи из рубрики «Практические задания» не только в тетради, но и с помощью компьютера. В 7 классе вы узнали, что в геометрии построения выполняют с помощью линейки и циркуля. Поэтому вам нужно найти среди инструментов графического редактора те, которые выполняют функции линейки и циркуля.

Четырёхугольник и его элементы

1. Постройте четырёхугольники, иллюстрирующие теоретические сведения этого параграфа.

Параллелограмм. Свойства параллелограмма

2. Определите, какие свойства параллелограмма надо использовать, чтобы правильно нарисовать его, и какие инструменты графического пакета надо для этого применить. Нарисуйте параллелограмм и постройте две его высоты, выходящие из одной вершины. Какой инструмент вы используете, чтобы провести высоту к данной стороне?

Признаки параллелограмма

3. Представьте себе, что нарисован четырёхугольник. Каким образом вы можете проверить то, что он является параллелограммом? Какие инструменты графического пакета для этого можно использовать?

Прямоугольник

4. Найдите в графическом редакторе средство, которое позволяет быстро строить прямоугольники.

Ромб

5. Какое свойство ромба позволяет легко и правильно построить ромб?

6. Постройте два перпендикулярных пересекающихся отрезка. Представьте себе, что это диагонали четырёхугольника, и постройте этот четырёхугольник. Обязательно ли получится ромб? Каким условием надо дополнить это задание, чтобы полученный четырёхугольник оказался ромбом?

Квадрат

7. Найдите в графическом редакторе средство, которое позволяет быстро строить квадраты.

Средняя линия треугольника

8. Какой инструмент графического редактора вы будете использовать, чтобы найти середину отрезка?

9. Нарисуйте произвольный четырёхугольник. Выполните построение, которое проиллюстрирует ключевую задачу § 7. Как вы проверите, что отрезки, соединяющие середины сторон данного четырёхугольника, образовали параллелограмм?

Трапеция

10. Постройте трапецию. Какие инструменты графического редактора вы будете использовать, чтобы обеспечить параллельность сторон трапеции? чтобы построить равнобокую трапецию? чтобы построить прямоугольную трапецию?

Центральные и вписанные углы

11. Нарисуйте окружность и постройте несколько вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Пользуясь инструментами графического редактора, определите их величину.

12. Нарисуйте окружность, постройте центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Проверьте, как относятся величины этих углов.

Описанная и вписанная окружности четырёхугольника

13. Найдите оптимальный способ построения рисунков, на которых должны быть изображены окружность, вписанные в окружность и описанные около окружности четырёхугольники. Какое свойство касательной к окружности позволяет изобразить описанный четырёхугольник?

Теорема Фалеса.
Теорема о пропорциональных отрезках

14. Постройте чертежи, иллюстрирующие теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках. Измерьте длины нужных отрезков и проверьте, выполняются ли для них утверждения этих теорем. Насколько точно можно измерить отрезки средствами графического редактора, которым вы пользуетесь?

15. Представьте себе, что в вашем графическом редакторе нет инструмента, позволяющего строить параллельные прямые. Каким геометрическим фактом можно воспользоваться, чтобы построить параллельные прямые?

Подобные треугольники

16. Освойте инструменты графического редактора, которые позволяют изображать фигуры, имеющие одинаковую форму, но разные размеры. Постройте с помощью этих инструментов подобные треугольники.

17. Постройте графическую иллюстрацию к лемме о подобных треугольниках. Пользуясь указанными инструментами, покажите, что изображённые треугольники действительно подобны.

Первый признак подобия треугольников

18. Постройте два отрезка различной длины. Представьте себе, что это соответственные стороны подобных треугольников. Постройте произвольный треугольник, используя первый из этих отрезков в качестве стороны. Используя первый признак подобия треугольников, постройте подобный ему треугольник, используя второй отрезок в качестве стороны.

Второй и третий признаки подобия треугольников

19. Придумайте самостоятельно задание, которое бы позволило с помощью компьютера продемонстрировать второй и третий признаки подобия треугольников.

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

20. Постройте прямоугольный треугольник и опустите высоту на гипотенузу. Убедитесь, что выполняется лемма § 15.

Теорема Пифагора

21. Часто теорему Пифагора иллюстрируют, построив квадраты на сторонах прямоугольного треугольника. Многие поколения школьников называют этот рисунок Пифагоровы штаны и формулируют теорему в шутливой форме: «Пифагоровы штаны на все стороны равны». Постройте этот рисунок.

22. Разрежьте на части квадраты, построенные на катетах. Из них можно сложить квадрат, построенный на гипотенузе. Для произвольного прямоугольного треугольника поиск таких частей – задача непростая. А вот для равнобедренного прямоугольного треугольника найти такой способ разрезания довольно легко. Какие это части?

23. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник. Постройте такой набор фигур, чтобы, перемещая их, можно было составить как квадрат, построенный на гипотенузе, так и фигуру, состоящую из двух квадратов, построенных на катетах.

Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

24. Освойте средства, позволяющие находить тригонометрические функции угла треугольника с помощью калькулятора. Воспользуйтесь этими средствами при решении задач § 18.

Решение прямоугольных треугольников

25. При решении задач этого пункта используйте калькулятор для вычислений.

Многоугольники

26. Сформулируйте какой-либо набор свойств многоугольника (количество сторон, выпуклость, вписанный, описанный и т. п.). Постройте многоугольник, обладающий этим набором свойств. Какие инструменты графического редактора надо использовать, чтобы обеспечить выполнение заданных свойств?

Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

27. Постройте квадрат и примите его за единичный. Скопируйте его несколько раз. Из полученных единичных квадратов сложите несколько различных равновеликих прямоугольников.

Площадь параллелограмма

28. Создайте набор фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать доказательство теоремы о площади параллелограмма. Каким свойством площади многоугольника мы при этом пользуемся?

29. Данная теорема верна независимо от того, какую из пар (сторона и опущенная на неё высота) выбрать для вычисления площади. Создайте набор фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать это утверждение.

Площадь треугольника

30. Создайте наборы фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать доказательство утверждений теоретической части этого параграфа.

Площадь трапеции

31. Постройте произвольную трапецию. Каким образом разрезать её на части, чтобы показать, что формула для вычисления площади трапеции является верной?

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект – это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражаются замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками информации с помощью руководителя проекта составляется окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы – 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Фалес Милетский — великий геометр, строитель, астроном

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Савин А.П.* Энциклопедический словарь юного математика. – М. : Педагогика, 1989.
2. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта+, 2003. Т. 11.
3. http://ru.wikipedia.org/ Фалес Милетский.
4. http://naturalhistory.narod.ru/Person/A_N/Fales_1.htm/

2. Пифагор и его великая теорема

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Башмакова И., Лапин А.* Пифагор // Квант. – 1986. – № 1.
2. *Березин В.* Теорема Пифагора // Квант. – 1972. – № 3.
3. *Волошинов А.В.* Пифагор: союз истины, добра и красоты. – М. : Просвещение, 1993.
4. *Воронин С., Кулагин А.* О задаче Пифагора // Квант. – 1987. – № 1.
5. *Глейзер Г.Д.* Поговорим о теореме Пифагора // Математика (еженедельное приложение к газете «Первое сентября»). – 1996. – № 13.
6. *Рубинов Р.* По следам теоремы Пифагора // Квант. – 1981. – № 11.
7. *Халамайзер А.Я.* Пифагор. – М. : Высшая школа, 1994.
8. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта+, 2003. Т. 11.
9. http://ru.wikipedia.org/ Пифагор.
10. http://www.moypifagor.narod.ru/ Пифагор и его теорема.
11. http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Пифагора.

3. Аксиоматический метод в геометрии

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Успенский В.А.* Что такое аксиоматический метод? – М. : Ижевск, 2001.
2. *Савин А.П.* Энциклопедический словарь юного математика. – М. : Педагогика, 1989.
3. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта+, 2003. Т. 11.
4. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy/4127/ Аксиоматический метод.

4. Геометрия на клетчатом листе

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Геометрия на клетчатой бумаге. – М. : МЦНМО, 2009.
2. http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.
3. http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».
4. http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

5. Граф как геометрическая модель логической задачи

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Барболин М.* Головоломки и графы // Квант. – 1975. – № 2.

2. *Башмаков М.* Паросочетания и транспортные сети // Квант. – 1970. – № 4.

3. *Белага Э.* Арифметика на географической карте // Квант. – 1974. – № 4.

4. *Гуровиц В.М., Ховрина В.В.* Графы. – М. : МЦНМО, 2009.

5. *Мельников О.И.* Незнайка в стране графов. – М. : Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010.

6. *Оре О.* Графы и их применение. – М. : Мир, 1965.

7. *Березина Л.* О графах с цветными рёбрами // Квант. – 1973. – № 8.

8. http://logika.vobrazovanie.ru/index.php?link=graf.html&&a=kto_est_kto.html/

6. Замечательные точки треугольника

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Готман Э.Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения. – М. : Просвещение, 1996.

2. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

3. *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. – М. : МЦНМО, 2002.

4. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. Планиметрия. – М. : Дрофа, 2001.

5. *Энциклопедия* для детей. Математика. – М. : Аванта+, 2003. Т. 11.

6. http://www.home-edu.ru/user/f/00000568/zpt/head.htm/ Замечательные точки треугольника.

7. http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

8. http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

7. Свойства вневписанной окружности

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Коксетер Г.С., Грейтцер С.П.* Новые встречи с геометрией. – М. : Наука, 1978.

2. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

3. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. – М. : Наука, 1982.

4. http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

5. http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

6. http://www.math.ru/lib/ Электронная библиотека книг по математике.

7. http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

8. Метод вспомогательной окружности

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

2. *Готман Э.Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения. – М. : Просвещение, 1996.

3. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. – М. : Наука, 1982.

4. http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

5. http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

6. http://www.math.ru/lib/ Электронная библиотека книг по математике.

7. http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

9. Равновеликие и равносоставленные фигуры

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1. *Болтянский В.Г.* Равновеликие и равносоставленные фигуры // Популярные лекции по математике. – М. : Гостехиздат, 1956. – Вып. 22.

2. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М. : МЦНМО, 2006.

3. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. – М. : Наука, 1982.

4. http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

5. http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.

6. http://www.math.ru/lib/ Электронная библиотека книг по математике.

7. http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.

Упражнения для повторения курса геометрии 8 класса

§ 1. Четырёхугольники

806. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки длиной 9 см и 14 см.

807. Биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 5 : 4$. Найдите стороны параллелограмма, если периметр треугольника BOC на 8 см больше периметра треугольника COD, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

808. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $2\angle ADB = \angle A + \angle BDC$. Найдите $\angle ADB$.

809. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD, касаются диагонали BD в точках M и K соответственно. Найдите отрезок MK.

810. Сколько разных параллелограммов можно составить из двух равных треугольников, если они: 1) разносторонние; 2) равнобедренные; 3) равносторонние?

811. Верно ли утверждение:

1) если диагонали четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм;

2) если две стороны четырёхугольника параллельны и точка пересечения диагоналей равноудалена от этих сторон, то этот четырёхугольник – параллелограмм;

3) если две стороны четырёхугольника параллельны, а две другие – равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм;

4) если биссектрисы двух противолежащих углов четырёхугольника перпендикулярны биссектрисе его третьего угла, то этот четырёхугольник – параллелограмм;

5) если диагональ четырёхугольника разбивает его на два равных треугольника, то этот четырёхугольник – параллелограмм;

6) если каждая диагональ четырёхугольника разбивает его на два равных треугольника, то этот четырёхугольник – параллелограмм;

7) если каждые две противолежащие вершины четырёхугольника равноудалены от диагонали, соединяющей две другие вершины, то этот четырёхугольник – параллелограмм?

812. Верно ли утверждение:

1) если две стороны четырёхугольника параллельны, а одна из диагоналей разбивает четырёхугольник на два равных треугольника, то этот четырёхугольник — параллелограмм;

2) если две стороны четырёхугольника параллельны, а точка пересечения диагоналей делит одну из них пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм;

3) если две противолежащие стороны четырёхугольника равны и диагонали его равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм?

813. Периметр ромба равен 8 см, а его высота — 1 см. Найдите углы ромба.

814. Угол при вершине B ромба $ABCD$ равен 40°, точки M и K — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на стороны BC и CD соответственно. Найдите углы треугольника AMK.

815. Перпендикуляр, опущенный из вершины B прямоугольника $ABCD$ на диагональ AC, делит угол ABC на два угла, величины которых относятся как $1 : 3$. Найдите угол между проведённым перпендикуляром и диагональю BD.

816. Серединный перпендикуляр диагонали прямоугольника образует с его большей стороной угол 60°. Отрезок этой прямой, принадлежащий прямоугольнику, равен 12 см. Найдите бóльшую сторону прямоугольника.

817. На диагонали AC ромба $ABCD$ отмечены точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBK$.

818. Периметр ромба на 42 см больше стороны ромба. Найдите периметр ромба.

819. Верно ли утверждение:

1) если диагонали четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник — прямоугольник;

2) если диагонали четырёхугольника равны и перпендикулярны, то этот четырёхугольник — квадрат;

3) если диагонали четырёхугольника перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — квадрат;

4) если диагонали четырёхугольника равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — квадрат;

5) если три стороны четырёхугольника равны, а диагональ является биссектрисой одного из его углов, то этот четырёхугольник — ромб?

В случае утвердительного ответа обоснуйте его, в случае отрицательного — начертите четырёхугольник, который является контрпримером.

820. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки D, F и E соответственно так, что $BD = BF = DE = EF$. Докажите, что точка F принадлежит биссектрисе угла BDE.

821. Расстояние от середины хорды AC окружности до диаметра AB равно 4 см. Найдите хорду BC, если $\angle BAC = 30^\circ$.

822. Постройте параллелограмм по его вершине и серединам сторон, которым эта вершина не принадлежит.

823. Боковая сторона AB и меньшее основание BC трапеции $ABCD$ равны соответственно 16 см и 15 см. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла BAD – основание BC или боковую сторону CD?

824. Диагональ равнобокой трапеции равна большему основанию и образует с ним угол 40°. Найдите углы трапеции.

825. Угол между двумя секущими, проходящими через точку вне окружности, равен 35°. Градусная мера большей дуги окружности, расположенной между сторонами этого угла, равна 100°. Найдите градусную меру меньшей дуги, находящейся между сторонами данного угла.

826. Докажите, что если вершина угла лежит вне окружности, а угол опирается на диаметр окружности, то этот угол – острый.

827. Докажите, что если вершина угла лежит внутри окружности, а угол опирается на диаметр окружности, то этот угол – тупой или развёрнутый.

828. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, перпендикулярны, $\angle ACB = 10^\circ$, $\angle BDC = 70^\circ$. Найдите углы данного четырёхугольника.

§ 2. Подобие треугольников

829. Две параллельные прямые пересекают одну из сторон угла с вершиной M в точках A и C, а другую – соответственно в точках B и D. Найдите отрезки MA и MC, если $MB : BD = 2 : 3$ и $MA + MC = 14$ см.

830. Найдите отношение оснований трапеции, если её диагонали делят среднюю линию трапеции на три равные части.

831. На медиане BD треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM : MD = 3 : 2$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке E. В каком отношении точка E делит сторону BC, считая от вершины B?

832. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает диагональ BD и сторону BC в точках E и F соответственно, $BE : ED = 2 : 7$. Найдите отношение $BF : FC$.

833. Медианы AD и BM треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, которая параллельна стороне AC и пересекает сторону BC в точке K. Найдите BD, DK и KC, если $BC = 18$ см.

834. Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и DC, длины которых относятся как $3 : 5$. Найдите стороны AB и BC, если их сумма равна 56 см.

835. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, составляет $\frac{2}{9}$ высоты, проведённой к основанию треугольника. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 72 см.

836. Стороны треугольника равны 2,5 см, 4,5 см и 6 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если его бóльшая сторона равна 24 см.

837. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E принадлежит стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = a$, $AC = b$.

838. Периметр параллелограмма равен 72 см, а его высоты относятся как $5 : 7$. Найдите стороны параллелограмма.

839. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Проведите прямую, равноудалённую от этих точек. Сколько решений имеет задача?

840. Прямая MB пересекает окружность в точках A и B (точка A лежит между точками M и B), а прямая MD – в точках C и D (точка C лежит между точками M и D), причём $AB = MC$, $MA = 20$ см, $CD = 11$ см. Найдите отрезок AB.

841. Прямая AB касается окружности в точке B, а прямая AC пересекает окружность в точках C и D (точка D лежит между точками A и C). Найдите отрезок CD, если $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

842. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, $CM = 4$ см, $DM = 6$ см, AM на 2 см больше BM. Найдите хорду AB.

843. На одной стороне угла с вершиной в точке A отметили точки B и C, а на другой – точки D и E, причём $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Найдите отрезок CE, если $BD = 20$ см.

§ 3. Решение прямоугольных треугольников

844. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 10 см, а расстояние между серединой гипотенузы и основанием высоты треугольника, проведённой к гипотенузе, равно 6 см. Найдите периметр данного треугольника.

845. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15 см, а высота, проведённая к основанию, на 6 см меньше основания. Найдите основание треугольника.

846. Из точки K, лежащей вне прямой a, проведены к этой прямой наклонные KA и KB, которые образуют с ней углы $45°$ и $30°$ соответственно. Найдите проекцию наклонной KB на прямую a, если $KA = 8\sqrt{6}$ см.

847. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей ромба к его стороне, делит её на отрезки длиной 4 см и 25 см. Найдите диагонали ромба.

848. Окружность, центр которой принадлежит гипотенузе прямоугольного треугольника, касается большего катета и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если катеты равны 5 см и 12 см.

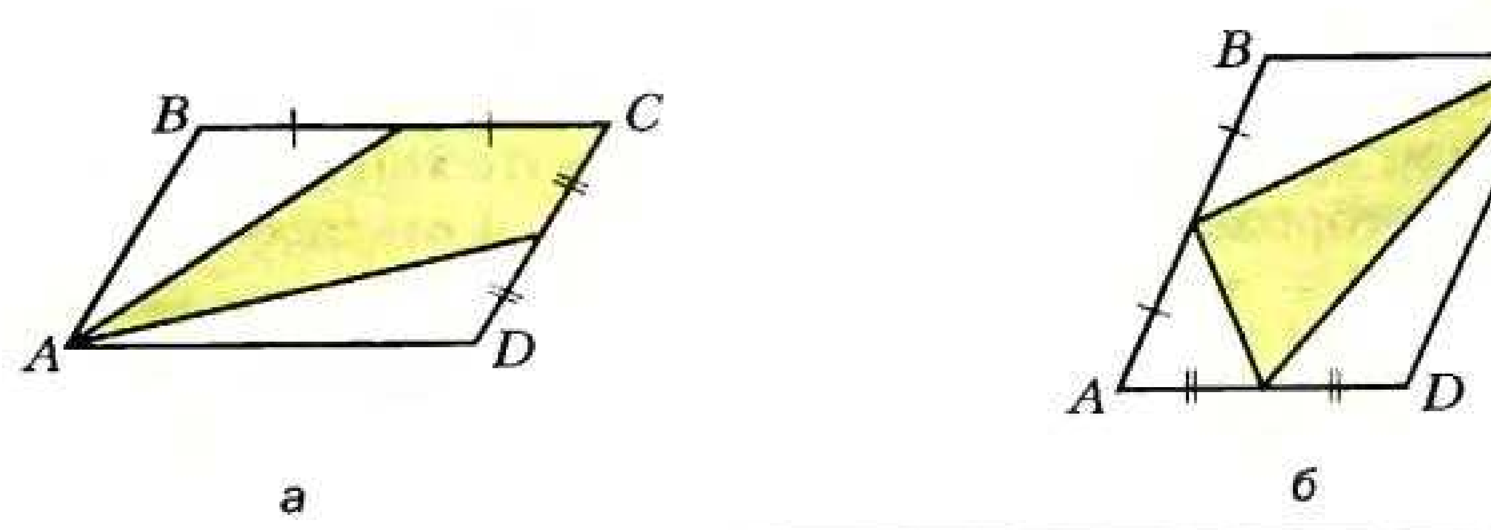
849. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите расстояние от вершины меньшего острого угла треугольника до центра вписанной окружности.

850. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на её диаметр, делит диаметр на два отрезка, один из которых на 27 см больше другого. Найдите диаметр окружности, если длина перпендикуляра равна 18 см.

§ 4. Многоугольники. Площадь многоугольника

851. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Найдите площадь закрашенной фигуры (рис. 238).

Рис. 238



852. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BD \perp AD$, $BD = 16$ см, $\angle A = 45^\circ$.

853. Найдите площадь квадрата, диагональ которого равна d.

854. Найдите площадь равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен R.

855. Катет прямоугольного треугольника равен b, а противолежащий ему угол равен β. Найдите площадь треугольника.

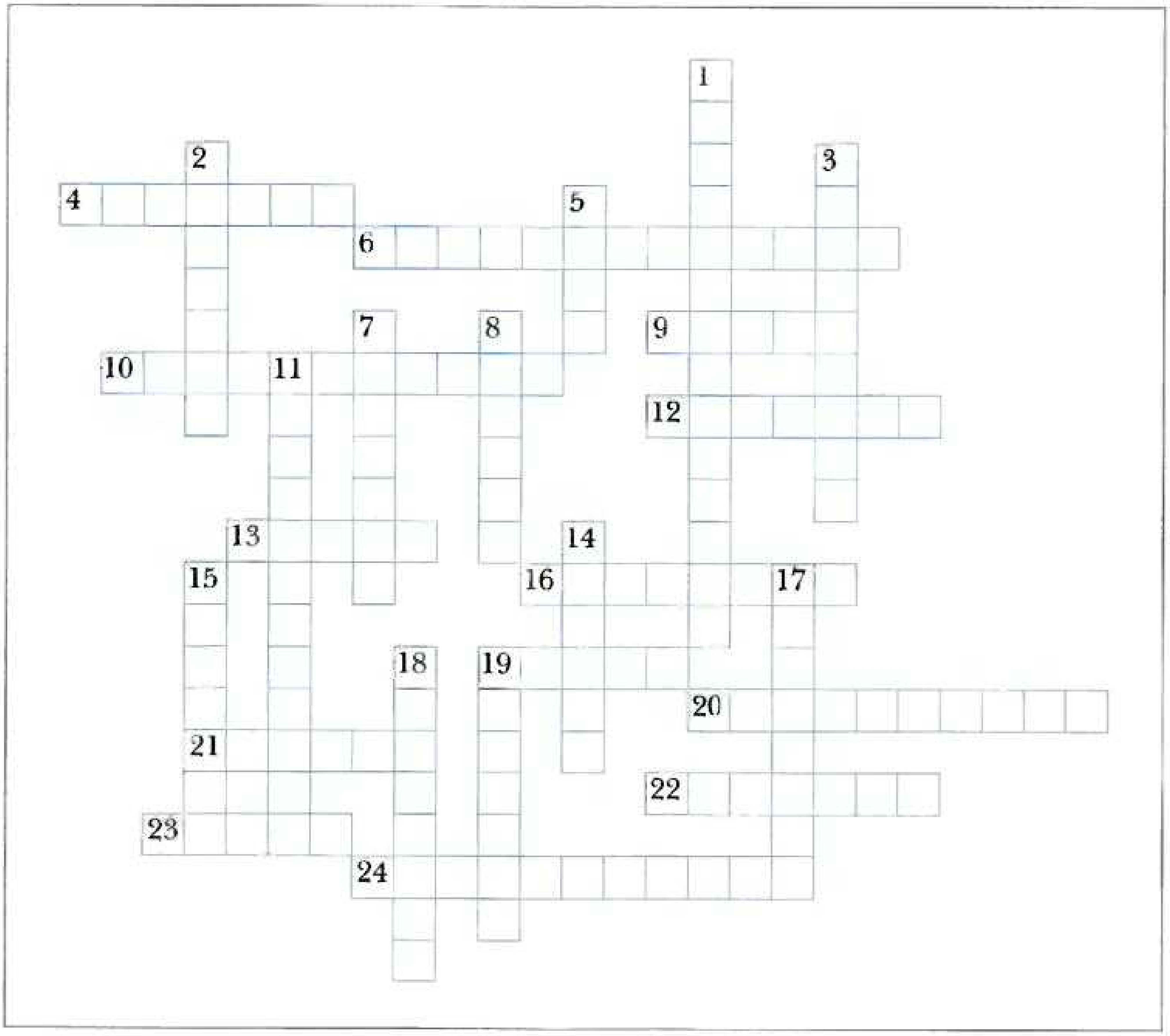
856. Острый угол прямоугольного треугольника равен α, а гипотенуза равна c. Найдите площадь треугольника.

857. Меньшее основание равнобокой трапеции равно 15 см, а высота — $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь трапеции, если один из её углов равен 150°.

858. Диагонали равнобокой трапеции являются биссектрисами её острых углов и точкой пересечения делятся в отношении 5 : 13. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 90 см.

859. Площадь равнобокой трапеции равна $36\sqrt{2}$ см^2, а острый угол — 45°. Найдите высоту трапеции, если в неё можно вписать окружность.

860. Решите кроссворд.



По горизонтали: 4. Древнегреческий учёный. **6.** Один из видов параллелограмма. **9.** Вспомогательная теорема. **10.** Угол, вершиной которого является центр окружности. **12.** Отношение катета, прилежащего к острому углу прямоугольного треугольника, к его гипотенузе. **13.** Отрезок, соединяющий две точки окружности. **16.** Сумма длин сторон многоугольника. **19.** Сторона прямоугольного треугольника. **20.** Сторона прямоугольного треугольника, квадрат которой равен сумме квадратов двух других его сторон. **21.** Автор книги «Начала». **22.** Сотая доля числа. **23.** Древнегреческий философ. **24.** Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведённому в эту точку.

По вертикали: 1. Вид четырёхугольника. **2.** Отношение катета, противолежащего острому углу прямоугольного треугольника, к прилежащему катету. **3.** Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность. **5.** Одна из частей окружности, на которые её разбивают две точки. **7.** Величина. **8.** Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону. **11.** Многоугольники, имеющие равные площади. **14.** Одна из частей круга, на которые его разбивают два радиуса. **15.** Утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства. **17.** Четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. **18.** Одна из декартовых координат точки. **19.** Прямоугольник, у которого все стороны равны.

Ответы и указания к упражнениям

14. 18 см, 12 см, 6 см, 27 см. **15.** 10 см, 8 см, 16 см, 30 см. **20.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **22.** 10 см. **26.** *Указание.* Постройте треугольник по двум соседним сторонам четырёхугольника и известному углу между ними. Третья сторона этого треугольника является диагональю искомого четырёхугольника. **29.** *Указание.* Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB и BC и углу B между ними. В треугольнике ACD известны сторона AC, прилежащий угол CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) и сумма сторон AD и CD. Построение треугольника по стороне, прилежащему углу и сумме двух других его сторон рассматривалось в курсе геометрии 7 класса. **34.** 32°. **47.** Прямоугольный. **53.** 9 см, 14 см. **57.** $AB = BC = CD = AD = 6$ см. **58.** 32 см. **59.** 45°, 135°. **60.** 6 см, 12 см. **64.** 80 см. **65.** 9 см, 24 см. **66.** 20 см, 24 см. **67.** 6 см. **68.** 48°, 132°. **71.** 40 см. **72.** 5 см, 9 см. **74.** 25 см. **77.** 3. **78.** 2 : 1. **79.** 72°, 108°. **82.** *Указание.* Искомая точка является точкой пересечения высот треугольника ABC. **84.** *Указание.* Докажите, что $\Delta MAD = \Delta DKC = \Delta MBK$. **85.** *Указание.* Постройте параллелограмм, одна вершина которого совпадает с вершиной данного угла, две другие вершины лежат на сторонах угла, а точка пересечения диагоналей параллелограмма совпадает с данной точкой. **86.** 24 см или 14 см. **108.** 32°. **109.** 16 см. **119.** 6 см, 12 см. **120.** 5 см, 10 см. **121.** 15 см, 25 см. **122.** 12 см. **124.** *Указание.* Пусть CM – медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе AB (рис. 239). На продолжении отрезка CM за точку M отложите отрезок MD, равный CM. Определите вид четырёхугольника $ACBD$ и воспользуйтесь свойствами четырёхугольников такого вида. **127.** 30°, 60°. *Указание.* Покажите, что в прямоугольном треугольнике ABM гипотенуза AM в 2 раза больше катета BM. **128.** 4,5 см. **131.** 1) *Указание.* Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и разности катетов. На рисунке 240 изображён прямоугольный треугольник ACB, в котором известны гипотенуза AB и разность катетов. На катете BC отмечена точка M так, что $CM = AC$. Тогда $BM = BC - AC$. Отсюда $\angle AMB = 135°$. Следовательно, можно построить треугольник AMB по сторонам AB и MB и углу AMB. **132.** 48°. **133.** 90°. **134.** ΔACE – равнобедренный. **157.** 6 см. **160.** 1) *Указание.* Задача сводится к построению прямоугольного треугольника

Рис. 239

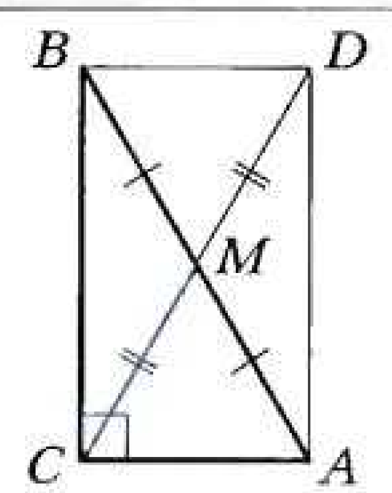
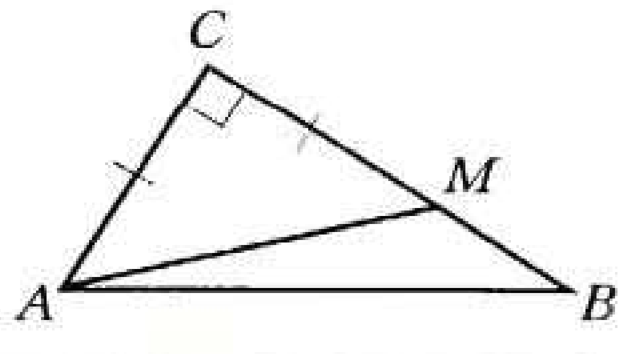
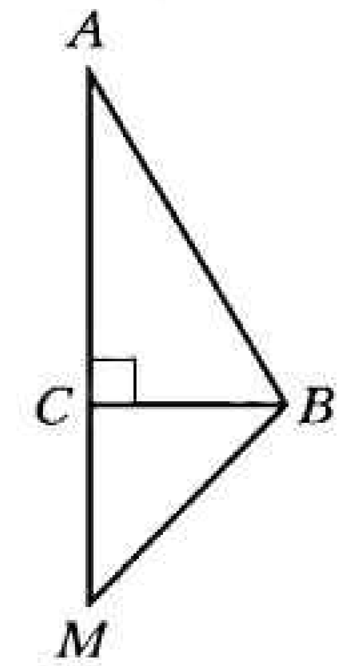


Рис. 240



ника по сумме катетов и острому углу. На рисунке 241 изображён прямоугольный треугольник ABC, в котором известны угол A и сумма катетов AC и CB. Тогда $AM = AC + CB$, $\angle CMB = 45°$. Треугольник AMB можно построить по стороне AM и двум прилежащим углам. **161.** *Указание.* Середина отрезка NK – точка O является точкой пересечения диагоналей ромба. Тогда прямая MO параллельна сторонам BC и AD. Длина отрезка MO равна половине стороны ромба. **163.** 30°, 72°, 78°; 18 см. **174.** 28 см. **177.** 48 см. **180.** *Указание.* Докажите, что $AC \perp MK$. **181.** *Указание.* Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой MK. **182.** *Указание.* Постройте два прямоугольных треугольника, в каждом из которых один катет равен стороне квадрата, а гипотенузы являются данными отрезками. Докажите равенство этих треугольников. **184.** *Указание.* Постройте равносторонний треугольник BO_1C так, чтобы точка O_1 принадлежала квадрату. Покажите, что $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15°$. Отсюда следует, что точки O и O_1 совпадают. **185.** *Указание.* На продолжении отрезка CD за точку D отметьте точку M_1 так, чтобы $DM_1 = BM$. Докажите, что $\angle EAM_1 = \angle EM_1A$. **202.** 28 см. **206.** $MK = 4$ см. *Указание.* Проведите среднюю линию треугольника ABC. **207.** 9 см. *Указание.* Рассмотрите треугольник, для которого отрезок MK является средней линией. **210.** *Указание.* Пусть точки M, K и F – середины отрезков AB, AD и AC соответственно. Определите, каким прямым принадлежат высоты треугольника MKF. **211.** *Указание.* Пусть точки E, F и K – середины отрезков AC, BC и BD соответственно. Докажите, что треугольник EFK равнобедренный. **213.** 37°. **214.** 8 см. **234.** 16 см, 34 см. **236.** 16 см. **237.** 50°, 60°. **239.** 28 см. **247.** 7,2 см, 10,8 см. **249.** $2h$. **250.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **251.** 12 см, 12 см, 12 см. **252.** 60°, 120°. **253.** 8 см, 16 см. **254.** 60°, 120°. **255.** Если острый угол трапеции равен 45°. **260.** 7 см. **261.** 13 см, 21 см. **264.** $\frac{3a}{4}$. **265.** 72°, 108°. **266.** 8 см. *Указание.* Проведите через вершину C прямую, параллельную прямой BD. Пусть E – точка пересечения проведённой прямой с прямой AD. Рассмотрите треугольник ACE. **267.** *Указание.* Точка пересечения биссектрис является вершиной прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является боковая сторона трапеции. Рассмотрите медиану этого треугольника, проведённую к гипотенузе, и докажите, что она параллельна основаниям трапеции. **268.** 1) *Указание.* Через одну из вершин меньшего основания с помощью циркуля и линейки проведите прямую, параллельную боковой стороне трапеции. Задача свелась к построению треугольника по трём сторонам;

Рис. 241



2) *Указание.* Через одну из вершин меньшего основания проведите прямую, параллельную диагонали трапеции. Задача свелась к построению треугольника по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне. **271.** $a + b$. *Указание.* Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Проведите перпендикуляры AM, OK и CE к прямой, проходящей через точку B, и покажите, что $OK = \frac{a+b}{2}$. **275.** 1) 120°; 2) 120°. **297.** *Указание.* Проведите хорду BC и воспользуйтесь тем, что $\angle AMC$ – внешний угол треугольника BMC. **298.** *Указание.* Проведите хорду BC и воспользуйтесь тем, что $\angle ABC$ – внешний угол треугольника BMC. **299.** 10°. **300.** 40°, 40°, 100°. **301.** 120°, 20°, 40°. **306.** 56°, 56°, 68°. **308.** *Указание.* Постройте высоты треугольника ABC из вершин A и B. **309.** *Указание.* Через точки касания окружностей проведите их общую касательную. Воспользовавшись ключевой задачей § 9, докажите, что рассматриваемые хорды параллельны общей касательной. **310.** *Указание.* $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = \angle MBA + \angle BAC = \angle BMD$. **311.** Искомое ГМТ – две дуги, изображённые на рисунке 242, за исключением точек A и B. *Указание.* Проведите два луча AC и BC так, что $\angle BAC = \angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Пусть эти лучи пересекаются в точке C. Очевидно, что $\angle ACB = \alpha$. Опишите окружность около треугольника ABC. Выполнив аналогичное построение в другой полуплоскости относительно прямой AB, получите треугольник ABC_1, около которого также опишите окружность. Дуги ACB и AC_1B, за исключением точек A и B, являются искомым ГМТ. **313.** *Указание.* Воспользуйтесь результатами задачи 311. **314.** *Указание.* Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, точка M – середина стороны AD (рис. 243). Тогда $OM = \frac{1}{2}AB$. Треугольник AOD можно построить (см. за-

Рис. 242

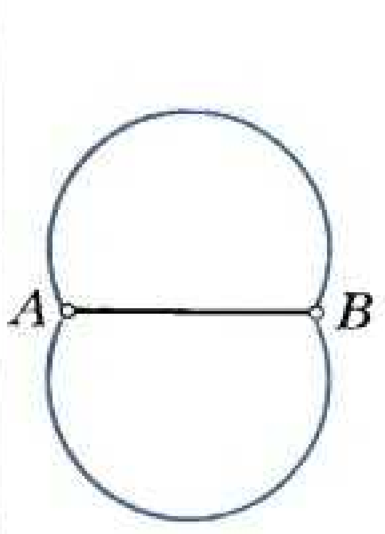


Рис. 243

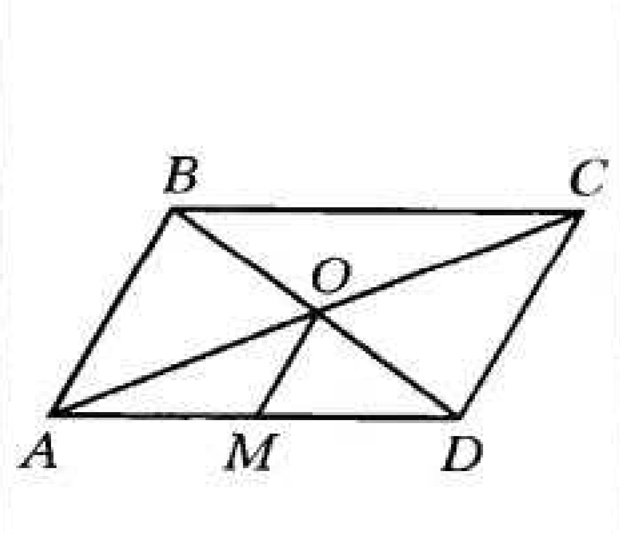


Рис. 244

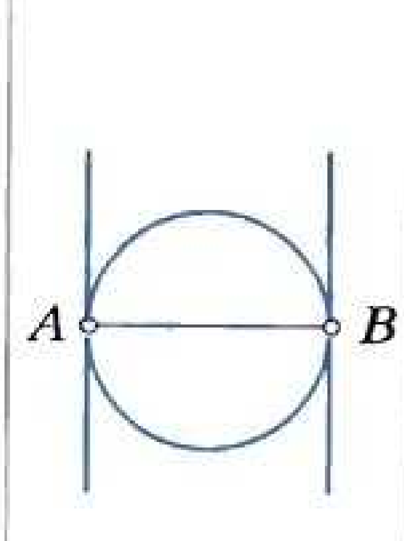
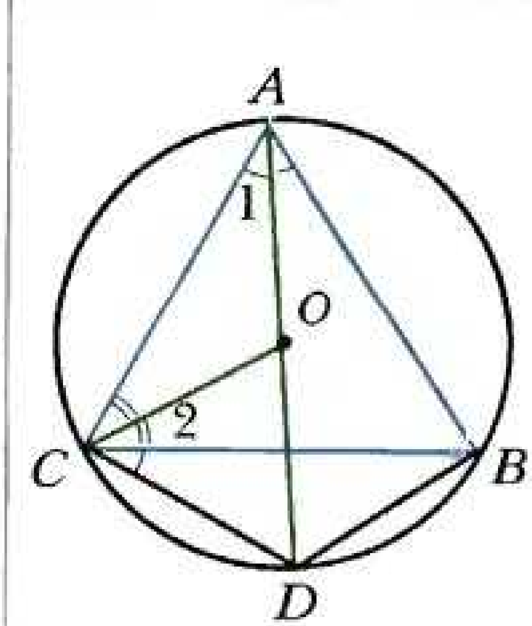
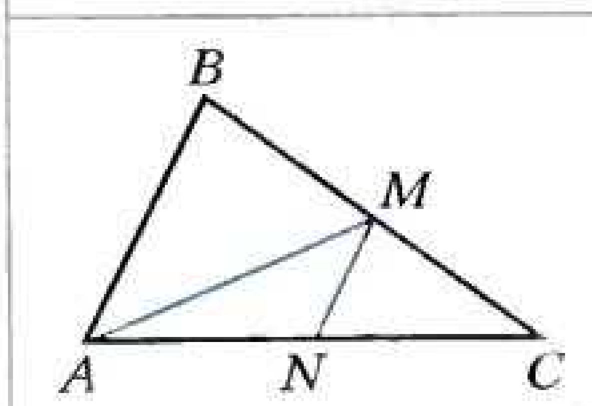


Рис. 245



дачу 313). **316.** Искомое ГМТ выделено на рис. 244 синим цветом. **317.** *Указание.* $\angle DCB = \angle DAB = \angle 1$ (рис. 245). Тогда $\angle OCD = \angle 1 + \angle 2$. $\angle COD = \angle 1 + \angle ACO$. Однако $\angle ACO = \angle 2$. Следовательно, $\angle OCD = \angle COD$. **318.** *Указание.* Пусть отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Вычислите угол C_1MB_1, воспользовавшись результатами задачи 297. **319.** *Указание.* Постройте окружность с центром в точке O_1 и радиусом, равным разности радиусов данных окружностей. Проведите через точку O_2 касательную к построенной окружности. **320.** *Указание.* Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, в котором известны угол B и сторона AC. Докажите, что $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$. В треугольнике AOC известны сторона AC, угол AOC и высота, проведённая из вершины O (радиус вписанной окружности). Далее см. задачу 312. **321.** *Указание.* На рисунке 246 изображён треугольник ABC, в котором известны сторона AC, угол B и медиана, проведённая к стороне BC. Проведите среднюю линию MN треугольника ABC. Тогда $\angle NMC = \angle B$. Постройте ГМТ точек X таких, что $\angle NXC = \angle B$. **322.** 9 см, 10 см, 11 см. **323.** $P_1 + P_2 + P_3$. **324.** Прямоугольный или равнобедренный. **342.** 90°. **343.** 6 см. **347.** 88°, 74°, 92°, 106°. **348.** 62°, 118°. **350.** 196 см. **351.** 6 см. **352.** 60°, 120°. **353.** $\frac{d}{2}$. *Указание.* Докажите, что угол между диагональю и бо́льшим основанием трапеции равен 60°. Далее воспользуйтесь ключевой задачей § 8. **354.** 6 см. *Указание.* Докажите, что центр окружности, описанной около трапеции, является серединой большего основания. **355.** *Указание.* Опишите окружность около четырёхугольника $CMKB$. **357.** 30°. *Указание.* Докажите, что около четырёхугольника $AMOK$ можно описать окружность, и воспользуйтесь тем, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. **358.** 60°. *Указание.* Обозначив $\angle N = \alpha$, выразите через α угол AOB. **359.** *Указание.* Докажите, что около четырёхугольника $ACBO$ можно описать окружность. **360.** *Указание.* Докажите, что угол CPB не изменяет свою величину. **361.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что в прямоугольных треугольниках APK и AMQ острые углы APQ и AMQ равны. **362.** *Указание.* Точки A, C, A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC. Воспользуйтесь тем, что серединный перпендикуляр хорды проходит через центр окружности. **363.** *Указание.* Докажите, что средняя линия данной трапеции равна сумме радиусов построенных окружностей. **366.** 128°. **386.** 30 см. **388.** 12 см. **389.** 4 см. **390.** 6 см, 45°. **392.** 20 см, 24 см. **393.** 5 см, 10 см. **395.** 8 см, 12 см. **397.** 6 см, 5 см, 6 см. **398.** 15 см, 12 см, 21 см. **399.** 15 см. **402.** 45 см.

Рис. 246



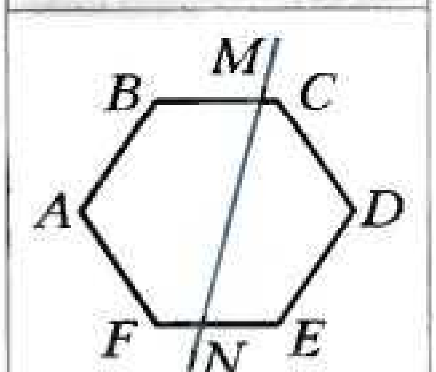
404. 21 см, 15 см. **405.** 45 см, 18 см. **406.** 30 см, 50 см. **407.** 7 : 9. **408.** 3 : 5. **409.** 9 см. **410.** 50 см. **411.** 3 : 5. *Указание.* Проведите через точку K прямую, параллельную прямой AM. **412.** 1) 3 : 7. *Указание.* Через точку M проведите прямую, параллельную прямой BK; 2) 2 : 3. *Указание.* Проведите через точку K прямую, параллельную прямой CM. **413.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что средняя линия трапеции делит диагональ пополам. **415.** 2) *Указание.* Пусть дан угол ABC. Проведите прямую OK, параллельную лучу BC (точка K принадлежит стороне AB). На луче KA отметьте точку M такую, что $MK : KB = 2 : 3$. **416.** 3) *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник BDK, у которого катет BD равен данной высоте, а гипотенуза BK – данной медиане. По данному углу и углу BKD найдите угол между двумя медианами треугольника; 4) *Указание.* Пусть ABC – искомый треугольник, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 которого пересекаются в точке M. На луче MB_1 отметьте точку F так, что $MB_1 = B_1F$. Треугольник MCF можно построить по трём сторонам. **417.** 2) *Указание.* Пусть ABC – искомый треугольник, медианы AA_1 и CC_1 которого пересекаются в точке M. Треугольник AMC можно построить по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне. **419.** *Указание.* Проведите через точку C прямую, параллельную прямой BD. Пусть проведённая прямая пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что $BC = BE$, и воспользуйтесь теоремой о пропорциональных отрезках. **420.** a. **421.** 11 см. **432.** 33 м. **439.** 6 см. **440.** 9 см. **441.** 40 см, 60 см. **442.** 36 см. **443.** 8 см. **444.** 4,8 см. *Указание.* Через вершину A проведите прямую, параллельную BD. **445.** 6 см, 12 см. **446.** 36 см. **447.** 1) 30°, 30°, 120°; 2) 30°, 60°, 90°. **463.** 6 см, 30 см. **464.** 10,5 см, 13,5 см. **467.** 42 см. **468.** 10 см, 14 см. **469.** 12,5 см, 3,5 см. **471.** 12 м. **475.** 24 см. **476.** 16 см. **477.** 16 см. **478.** 5 см. *Указание.* Проведите через точку P диаметр окружности и воспользуйтесь ключевой задачей 1 § 13. **479.** 10 см. **480.** 27 см. **481.** 2) 36 см. **482.** 10 см. **483.** $\frac{ah}{a+h}$. **484.** 27 см, 15 см. **485.** 1) 20°, 160°; 2) 50°, 130°. **487.** 18 см. **496.** 18 см, 30 см. **497.** 50 см, 20 см. **498.** 6 см. **500.** $\frac{ab}{a+b}$. *Указание.* Докажите, что $\triangle KBM \backsim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $\frac{b}{a+b}$. **501.** 6 см. *Указание.* Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle BDC$. **502.** *Указание.* Докажите, что $\triangle AHC \backsim \triangle ABD$ по второму признаку подобия треугольников. Отсюда $\angle ACH = \angle ABD$. **503.** *Указание.* Докажите, что из подобия треугольников BMC и CMK следует подобие треугольников ABM и KAM. **505.** *Указание.* Пусть окружности пересекаются в точках E и F. Для двух пар хорд AB и EF, CD и EF примените ключевую задачу 1 § 13. **506.** 9 см, 14 см. **508.** 10 см. **514.** 15 см, 20 см. **515.** 30 см, 24 см. **516.** $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **517.** 14,5 см. **518.** 62 см. **519.** 12,5 см.

520. 12,8 см. **521.** 2,5 см. **522.** 196 см. *Указание.* Докажите, что концы боковой стороны трапеции и центр вписанной окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. **523.** 18 см. **525.** 7 см, 14 см. **526.** 14 см. **527.** 74°, 74°, 74°, 138°. **542.** 13 см. **543.** 10 см. **544.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **545.** $a\sqrt{2}$. **546.** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **547.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$. **548.** *а)* $\sqrt{6}$ см; *б)* $\sqrt{3}$ см; *в)* $4\sqrt{2}$ см. **549.** *а)* $\sqrt{2}$ см; *б)* 1 см. **550.** $4\sqrt{5}$ см. **551.** $4\sqrt{10}$ см. **552.** $4\sqrt{13}$ см. **553.** $4\sqrt{5}$ см. **554.** 10 см, 10 см, 12 см. **555.** 40 см, 25 см, 25 см. **556.** 20 см. **557.** 20 см. **558.** 24 см. **559.** 1,5 см, 22,5 см. **560.** 8 см, 6 см, 10 см. **561.** 6 см, $2\sqrt{73}$ см. **562.** 168 см. **563.** 200 см. **564.** 20 локтей. **565.** $8\sqrt{10}$ см. *Указание.* Докажите, что боковая сторона трапеции равна её большему основанию. **566.** $12\sqrt{3}$ см. **567.** $2\sqrt{65}$ см. **568.** $12\sqrt{5}$ см. **569.** 128 см. *Указание.* Воспользуйтесь свойством биссектрисы угла треугольника и найдите отношение боковой стороны к половине основания. **570.** 162 см. **571.** 54 см. **572.** $8\sqrt{10}$ см. **573.** 10 см, $2\sqrt{52}$ см, $2\sqrt{73}$ см. **574.** 26 см. **575.** $3\frac{3}{4}$ фута. **595.** 45°, 135°. **598.** 1) 1; 2) 0. **599.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$. **600.** $\frac{1}{6}$. *Указание.* Из подобия треугольников AMC и BDC следует, что $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BD} = \frac{1}{3}$. **601.** $\frac{6}{7}$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $\frac{KC}{AC} = \frac{BD}{AB}$. **602.** *Указание.* Из точки F опустите перпендикуляр на отрезок ED. Найдите тангенсы углов E и B. **603.** 3 см. **604.** 12 см. **605.** 14 см. **621.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **622.** a, $a\sqrt{3}$. **625.** 8 см. **626.** 16 см. **627.** 15 см. **628.** $4\sqrt{2}$ см. **629.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

630. $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **631.** $a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $\frac{a}{\cos\varphi}$, $a\sin\varphi$. **632.** $\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $d\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

633. $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **634.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **635.** $\frac{a(3-\sqrt{3})}{2}$. **636.** $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{93}$ см, $\sqrt{181}$ см. **638.** $\angle A = 86°$, $\angle B = 111°$, $\angle C = 94°$, $\angle D = 69°$. **639.** 18 см, 21 см. **654.** 3) $\frac{n(n-3)}{2}$. **655.** 12 сторон, 1800°. **658.** 150°, 60°, 150°. **659.** Пятиугольник. **660.** *Указание.* Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, каждый угол которого равен 120°. Если провести секущую MN (рис. 247), то сумма углов пятиугольника $ABMNF$ будет равной 540°.

Рис. 247



Тогда сумма углов BMN и FNM равна 180°. **662.** 80 см. **663.** $(26+10\sqrt{13})$ см. **664.** $3\sqrt{5}$ см. **674.** 0,000126 Н. **675.** 12 000 Н. **676.** $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **677.** $75\sqrt{3}$ см². **686.** В 2 раза. **687.** Ни одного, или два, или три. **688.** Ни одного или два. **689.** 504 см². **690.** 30 см. **691.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник, катеты которого равны сторонам данных квадратов. **692.** *Указание.* Сторона искомого квадрата $x=\sqrt{ab}$. **694.** 24 см. **695.** 2 см. **704.** 1) Два решения: 4 см и 9 см; 2) одно решение: 8 см. **705.** 300 см². **706.** 120 см². **707.** $108\sqrt{3}$ см². **708.** $ab\sin\alpha$. **709.** $64\sqrt{3}$ см². **710.** $140\sqrt{2}$ см². **711.** 37,5 см². **712.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **714.** 72 см². **715.** 360 см². **719.** 1 : 7. **732.** $\frac{200}{3}$ см². **733.** $11\sqrt{3}$ см². **734.** 170 см². **735.** $b^2\sin\alpha\cos\alpha$. **736.** $h^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **737.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{c^2}{4}$. **739.** $\frac{120}{13}$ см. **740.** 96 см². **741.** 108 см². **742.** 768 см². **744.** 52 см. **745.** 336 см². **746.** 1080 см². **757.** *Указание.* Учтите, что треугольники ABX и AXM имеют общую высоту. Это же свойство имеют и треугольники CBX и CXM. **758.** 120 см². **759.** 20 см, $6\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{10}$ см. **760.** 1176 см². **761.** 9,6 см². **762.** $\frac{4000}{3}$ см². *Указание.* Воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника, найдите отношение боковой стороны и половины основания треугольника. **763.** $\frac{4000}{3}$ см². **764.** 19 см². *Указание.* Воспользуйтесь результатами задач 750 и 757. **765.** *Указание.* Проведите прямые AM, BM и CM и воспользуйтесь результатами задачи 757. **766.** *Указание.* Проведите медиану AM. Пусть N – такая точка на стороне BC, что $AN \parallel DM$. Докажите, что прямая DN – искомая. **768.** 78°, 78°, 24°. **769.** $2\sqrt{57}$ см. **770.** 80 см. **782.** $108\sqrt{3}$ см². **783.** 195 см². **784.** 840 см². **785.** 132 см². **786.** $600\sqrt{3}$ см². **787.** 1640 см². **788.** $(32+32\sqrt{2})$ см². **789.** 294 см². **793.** 512 см². **794.** 192 см². **795.** 336 см². *Указание.* В данной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину C проведите прямую CF, параллельную BD (точка F принадлежит AD), и рассмотрите треугольник ACF. **796.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Указание.* Докажите, что угол при большем основании трапеции равен 60°. **797.** 156 см². *Указание.* Пусть O – центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Докажите, что треугольник AOB является прямоугольным, и найдите его высоту, проведённую из вершины O. **798.** 588 см². **799.** 2187 см². *Указание.* Докажите, что диагональ данной трапеции является биссектрисой угла при основании. Далее воспользуйтесь свойством биссектрисы треугольника. **800.** 936 см². **801.** $\frac{S}{2}$. *Указание.* Проведите среднюю линию MN трапеции.

Докажите, что высоты треугольников MCN и MND, проведённые из вершин C и D, равны половине высоты трапеции. **802.** 15 см, 10 см. **803.** 60°, 120°. **804.** 38 см. **806.** 64 см или 74 см. **807.** 10 см, 18 см. **808.** 60°. **809.** $a - b$. **811.** 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) да. *Указание.* Докажите, что точкой пересечения диагонали делятся пополам. **812.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **813.** 30°, 150°. **814.** 40°, 70°, 70°. **815.** 45°. **816.** 18 см. **818.** 56 см. **821.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **823.** CD. **824.** 70°, 110°. **825.** 30°. **828.** 80°, 100°, 150°, 30°. **829.** 4 см, 10 см. **830.** 1 : 2. **831.** 3 : 4. **832.** 2 : 5. **833.** 9 см, 3 см, 6 см. **834.** 21 см, 35 см. **835.** 28 см, 28 см, 16 см. **837.** $\frac{ab}{a+b}$. **838.** 21 см, 15 см. **840.** 25 см. **841.** 5 см. **842.** 10 см. **843.** 36 см. **844.** $(12\sqrt{5}+20)$ см. **845.** 18 см. **846.** 24 см. **847.** $4\sqrt{29}$ см, $10\sqrt{29}$ см. **848.** $\frac{65}{18}$ см. **849.** $2\sqrt{10}$ см. **850.** 45 см. **851.** *а*) $\frac{S}{2}$; *б*) $\frac{3S}{8}$. **852.** 256 см^2. **853.** $\frac{1}{2}d^2$. **854.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **855.** $\frac{b^2}{2\operatorname{tg}\beta}$. **856.** $\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha$. **857.** $72\sqrt{3}$ см^2. **858.** 24 300 см^2. **859.** 6 см.

Ответы к заданиям в тестовой форме «Проверьте себя»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Б	Г	А	А	В	В	Г	А	В	В
2	Б	В	В	В	Б	В	Г	Б	Г	А
3	В	Б	В	Б	Г	В	Б	В	Г	Б
4	Б	В	А	Г	А	Г	Г	Б	Г	В

Сведения из курса геометрии 7 класса

Простейшие геометрические фигуры и их свойства

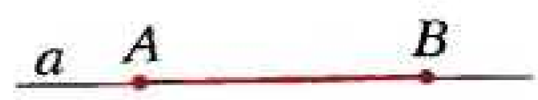
1. Точки и прямые

- *Основное свойство прямой.* Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.
- Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.
- Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

2. Отрезок и его длина

- Точки A и B прямой a (рис. 248) ограничивают часть прямой, которую вместе с точками A и B называют отрезком, а точки A и B – концами этого отрезка.

Рис. 248

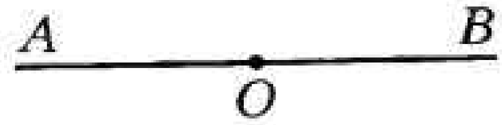


- Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.
- Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки.
- *Основное свойство длины отрезка.* Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, т. е. $AB = AC + CB$.
- Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

3. Луч. Угол

- Точка O прямой AB (рис. 249) разбивает прямую на две части, каждую из которых вместе с точкой O называют лучом или полупрямой. Точку O называют началом луча.

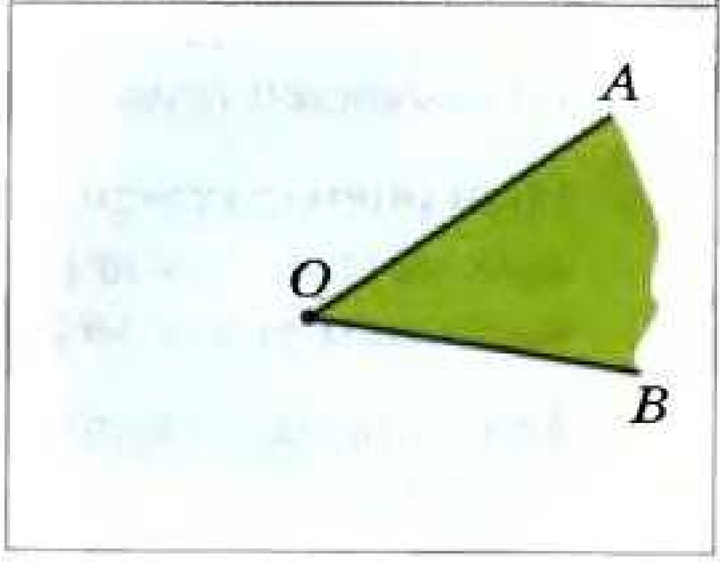
Рис. 249



- Два луча, имеющие общее начало и лежащие на одной прямой, называют дополнительными.

- ✔ Два луча OA и OB, имеющие общее начало (рис. 250), разбивают плоскость на две части, каждую из которых вместе с лучами OA и OB называют углом. Лучи OA и OB называют сторонами угла, а точку O — вершиной угла.
- ✔ Угол, сторонами которого являются дополнительные лучи, называют развёрнутым.

Рис. 250

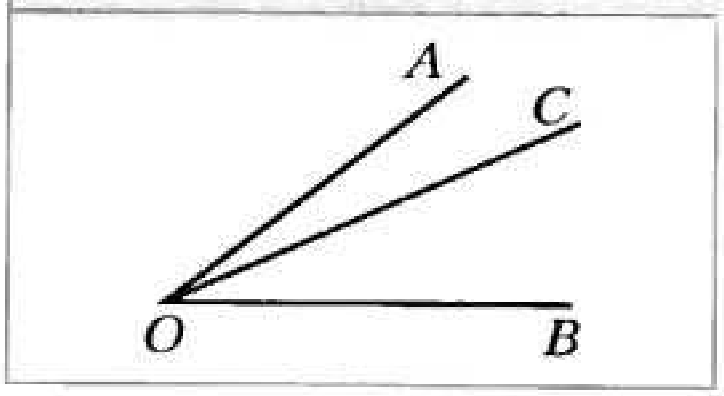


- ✔ Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.
- ✔ Биссектрисой угла называют луч с началом в его вершине, делящий этот угол на два равных угла.

4. Измерение углов

- ✔ Каждый угол имеет определённую величину (градусную меру).
- ✔ Угол, градусная мера которого меньше 90°, называют острым.
  Угол, градусная мера которого равна 90°, называют прямым.
  Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°, называют тупым.
- ✔ Равные углы имеют равные величины, и наоборот, если величины углов равны, то равны и сами углы.
- ✔ *Основное свойство величины угла.* Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB (рис. 251), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Рис. 251



5. Смежные и вертикальные углы

- ✔ Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.
- ✔ Сумма смежных углов равна 180°.
- ✔ Два угла, отличных от развёрнутого, называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.
- ✔ Вертикальные углы равны.

6. Перпендикулярные прямые. Серединный перпендикуляр

✔ Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.

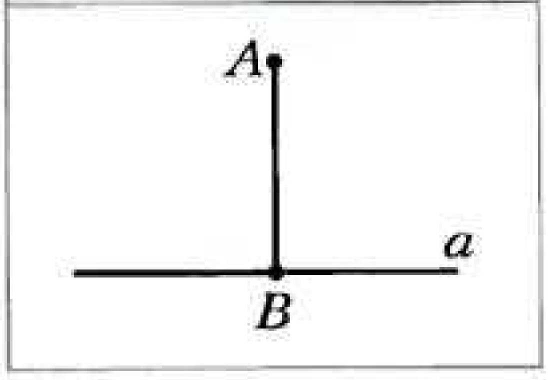
✔ Неперпендикулярные прямые при пересечении образуют пару равных острых углов и пару равных тупых углов. Величину острого угла называют углом между неперпендикулярными прямыми.

✔ Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен 90°.

✔ Два отрезка называют перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

✔ На рисунке 252 изображены прямая a и перпендикулярный ей отрезок AB, конец B которого принадлежит прямой a. В таком случае говорят, что из точки A на прямую a опущен перпендикуляр AB. Точку B называют основанием перпендикуляра AB.

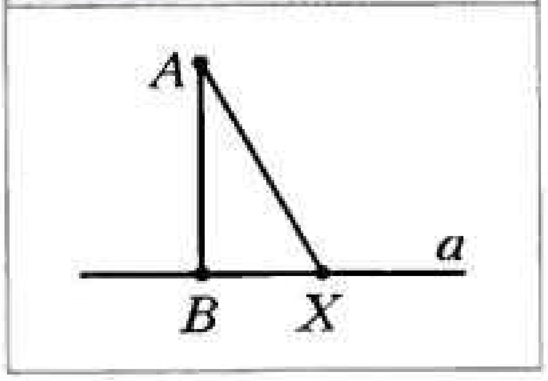
Рис. 252



✔ Длину перпендикуляра AB называют расстоянием от точки A до прямой a. Если точка A принадлежит прямой a, то считают, что расстояние от точки A до прямой a равно нулю.

✔ Опустим из точки A на прямую a перпендикуляр AB (рис. 253). Пусть X – произвольная точка прямой a, отличная от точки B. Отрезок AX называют наклонной, проведённой из точки A к прямой a.

Рис. 253



✔ Через данную точку проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

✔ Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.

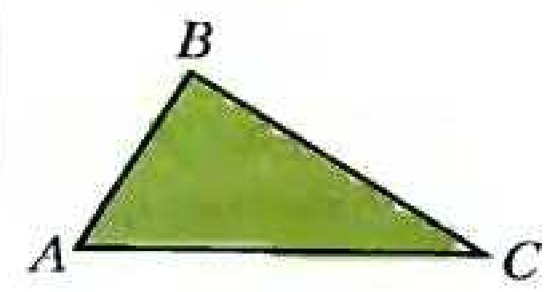
✔ Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.

✔ Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.

Треугольники

7. Треугольник и его элементы. Равные треугольники

Рис. 254



- ✔ Три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, соединены отрезками (рис. 254). Образовавшаяся фигура ограничивает часть плоскости, которую вместе с отрезками AB, BC и CA называют треугольником. Точки A, B, C называют вершинами, а отрезки AB, BC, CA – сторонами треугольника. Треугольник называют и обозначают по его вершинам.
- ✔ В треугольнике ABC угол B называют углом, противолежащим стороне AC, а углы A и C – углами, прилежащими к стороне AC.
- ✔ Периметром треугольника называют сумму длин всех его сторон.
- ✔ Треугольник называют остроугольным, если все его углы острые. Треугольник называют прямоугольным, если один из его углов прямой.
  Треугольник называют тупоугольным, если один из его углов тупой.
- ✔ Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют гипотенузой, а стороны, прилежащие к прямому углу, – катетами.
- ✔ *Неравенство треугольника.* Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.
- ✔ Два треугольника называют равными, если их можно совместить наложением.
- ✔ Те пары сторон и углов, которые совмещаются при наложении треугольников, называют соответственными сторонами и соответственными углами.
- ✔ В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.
- ✔ В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.
- ✔ В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бóльшая сторона.

8. Высота, медиана, биссектриса треугольника

- ✔ Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.
- ✔ Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.
- ✔ Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.

9. Признаки равенства треугольников

- ✔ *Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.* Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
- ✔ *Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам.* Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- ✔ *Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам.* Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

10. Равнобедренный треугольник и его свойства. Равносторонний треугольник

- ✔ Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.
- ✔ Равные стороны равнобедренного треугольника называют боковыми сторонами, а третью сторону – основанием равнобедренного треугольника.
- ✔ Вершиной равнобедренного треугольника называют общую точку его боковых сторон.
- ✔ В равнобедренном треугольнике:
  1) углы при основании равны;
  2) биссектриса угла при вершине является медианой и высотой.

- Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.
- В равностороннем треугольнике: 1) все углы равны; 2) биссектриса, высота и медиана, проведённые из одной вершины, совпадают.

11. Признаки равнобедренного треугольника

- Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

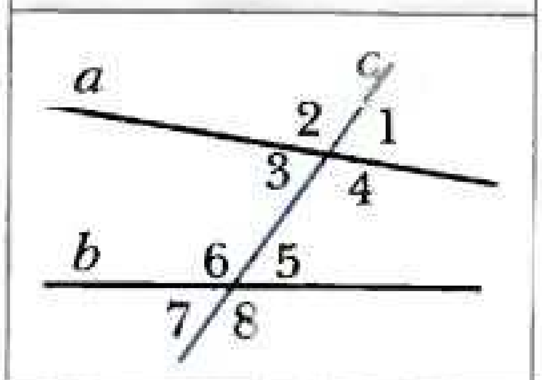
12. Параллельные прямые

- Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются. Если прямые a и b параллельны, то пишут $a \parallel b$ (читают: «прямые a и b параллельны» или «прямая a параллельна прямой b»).
- *Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых).* Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.
- Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.
- Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
- Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

13. Признаки параллельности двух прямых

- Если две прямые a и b пересечь третьей прямой c, то образуется восемь углов (рис. 255). Прямую c называют секущей прямых a и b. Углы 3 и 6, 4 и 5 называют односторонними. Углы 3 и 5, 4 и 6 называют накрест лежащими. Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют соответственными.

Рис. 255



- ✔ Если накрест лежащие углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.
- ✔ Если сумма односторонних углов, образовавшихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.
- ✔ Если соответственные углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

14. Свойства параллельных прямых

- ✔ Если две параллельные прямые пересекаются секущей, то:
  1) углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны;
  2) углы, образующие пару соответственных углов, равны;
  3) сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.
- ✔ Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

15. Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника

- ✔ Сумма углов треугольника равна 180°.
- ✔ Среди углов треугольника по крайней мере два угла острые.
- ✔ Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.
- ✔ Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
- ✔ Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

16. Признаки равенства прямоугольных треугольников

- ✔ *Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.* Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.
- ✔ *Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам.* Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

- ✔ *Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.* Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.
- ✔ *Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.* Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.
- ✔ *Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.* Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

17. Свойства прямоугольного треугольника

- ✔ В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.
- ✔ Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.
- ✔ Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Окружность и круг

18. Геометрическое место точек

- ✔ Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определённым свойством.
- ✔ Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.
- ✔ Биссектриса угла является геометрическим местом точек, которые принадлежат углу и равноудалены от его сторон.

19. Окружность и круг и их элементы

- ✔ Окружностью называют геометрическое место точек, равноудалённых от заданной точки. Эту точку называют центром окружности.
- ✔ Любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром, называют радиусом окружности.

- ✔ Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой окружности. Хорду, проходящую через центр окружности, называют диаметром.
- ✔ Диаметр окружности в два раза больше её радиуса.
- ✔ Кругом называют геометрическое место точек, расстояние от которых до заданной точки не больше данного положительного числа. Заданную точку называют центром окружности, а данное число – радиусом круга. Если X – произвольная точка круга радиуса R с центром O, то $OX \leq R$.
  Окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.
- ✔ Хорда и диаметр круга – это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

20. Свойства окружности

- ✔ Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.
- ✔ Диаметр окружности, который делит хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

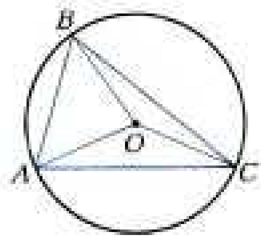
21. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности

- ✔ Прямая и окружность могут не иметь общих точек, или иметь две общие точки, или иметь одну общую точку.
- ✔ Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют касательной к окружности.
- ✔ Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
- ✔ Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.
- ✔ Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.
- ✔ Если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющие данную точку с точками касания, равны.

22. Описанная и вписанная окружности треугольника

✔ Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника.
На рисунке 256 изображена окружность, описанная около треугольника. В этом случае также говорят, что треугольник вписан в окружность.

Рис. 256



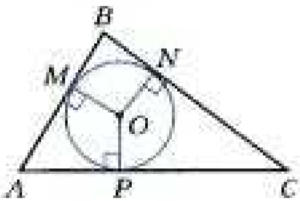
✔ Центр описанной окружности треугольника равноудалён от всех его вершин.

✔ Около любого треугольника можно описать окружность. Центр окружности, описанной около треугольника, – это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

✔ Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке.

✔ Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.
На рисунке 257 изображена окружность, вписанная в треугольник. В этом случае также говорят, что треугольник описан около окружности.

Рис. 257



✔ Центр вписанной окружности треугольника равноудалён от всех её сторон.

✔ В любой треугольник можно вписать окружность. Центр окружности, вписанной в треугольник, – это точка пересечения его биссектрис.

✔ Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

✔ Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле $r = \frac{a + b - c}{2}$, где r – радиус вписанной окружности, a и b – длины катетов, c – длина гипотенузы.

Алфавитно-предметный указатель

Оглавление

Учебное издание

Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Геометрия

8 класс

Учебник для учащихся
общеобразовательных учреждений

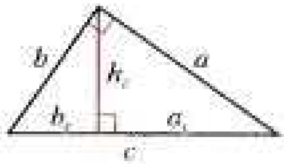
Редактор *Е.В. Буцко*
Художественный редактор *Е.В. Чайко*
Макет, внешнее оформление *Е.В. Чайко*
Рисунки *Н.К. Вахониной, И.В. Павловой*
Компьютерная вёрстка *О.Г. Поповой, О.В. Поповой*
Технический редактор *Е.А. Урвачева*
Корректоры *О.Ч. Кохановская, Ю.С. Борисенко*

Подписано в печать 10.04.13. Формат 70×90/16
Гарнитура NewBaskervilleC. Печать офсетная
Бумага офсетная № 1. Печ. л. 13,0
Тираж 3000 экз. Заказ № 748

ООО Издательский центр «Вентана-Граф»
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 1, стр. 3
Тел./факс: (495) 611-15-74, 611-21-56
E-mail: info@vgf.ru, http://www.vgf.ru

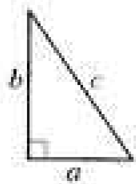
Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие „Правда Севера"»
163002, г. Архангельск, просп. Новгородский, 32
E-mail: zakaz@ippps.ru, http://www.ippps.ru

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике



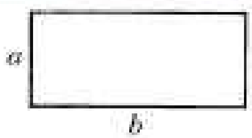
$a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$,
$h_c^2 = a_c b_c$

Теорема Пифагора

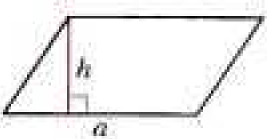


$c^2 = b^2 + a^2$

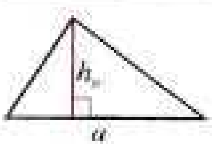
Площади многоугольников



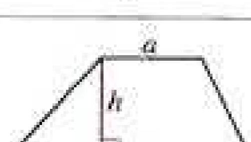
Формула площади прямоугольника:
$S = ab$



Формула площади паралллелограмма:
$S = ah$

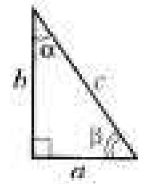


Формула площади треугольника:
$S = \frac{1}{2} ah_a$



Формула площади трапеции:
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника



$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \sin\beta = \frac{b}{c},$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c},$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b};\ \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a},$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a};\ \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{b}{a}.$$

Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 45° и 60°

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$